N° d'ordre : 24

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

André MIGEON

Ingénieur E N S C M B

Licencié ès-Sciences

PREMIÈRE THÈSE

Recherches sur la transmission de l'énergie par engrenages en micromécanique Perfectionnement aux engrenages épicycloïdaux

---

DEUXIÈME THÈSE

Proposition donnée par la Faculté

Exposé des connaissances actuelles concernant la photoélasticimétrie tridimensionnelle

---

Soutenue le 21 Avril 1967, devant la Commission d'Examen

MM. **MESNAGE,** Président
CHALEAT, Rapporteur
VALLEE

N° d'ordre : 24

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

André MIGEON

Ingénieur E N S C M B

Licencié ès-Sciences

PREMIÈRE THÈSE

Recherches sur la transmission de l'énergie par engrenages en micromécanique Perfectionnement aux engrenages épicycloïdaux

---

DEUXIÈME THÈSE

Proposition donnée par la Faculté

Exposé des connaissances actuelles concernant la photoélasticimétrie tridimensionnelle

---

Soutenue le Avril 1967, devant la Commission d'Examen

MM. **MESNAGE,** Président
CHALEAT, Rapporteur
VALLEE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE BESANCON

FACULTE DES SCIENCES

Doyen Honoraire	: M. GLANGEAUD
Professeurs Honoraires	: MM. BAILLAUD, DUFFIEUX, THIRY, TRILLAT, UEBERSFELD, VINCENSINI.
Maître de Conférences Honoraire	: M. GRANIER

DOYEN	M.	JACQUEMAIN	: Chimie Appliquée.
ASSESSEUR	M.	MESNAGE	: Chronométrie.
PROFESSEURS	MM.	TRONCHET	: Botanique.
		CHATELET	: Mathématiques.
		PERROT	: Chimie Générale.
		DREYFUSS	: Géologie-Minéralogie.
		THEOBALD	: Paléontologie et Géologie stratigraphique.
		QUANTIN	: Botanique.
		CHALEAT	: Mécanique Appliquée.
		NAHON	: Mécanique Générale.
		BERNARD	: Chimie Physique.
		RIPPLINGER	: Physiologie Animale.
		RIGAL	: Calcul numérique.
		VIENOT	: Physique.
		THIEBAUT	: Géologie-Minéralogie.
		GOMOT	: Zoologie
		PLUVINAGE	: Physique Théorique.
		ARBEY	: Astronomie.
		GALATRY	: Physique.
PROFESSEUR ASSOCIE	M.	DEFIX	: Mécanique Appliquée.

PROFESSEURS SANS CHAIRE	MM POTIER	: Physique des Solides.
	DEVIN	: Chimie Générale
	Mlle LEGRAND	: Botanique.
	MM. REAL	: Zoologie.
	VALLEE	: Mathématiques Appliquées.
	GOUARNE	: Mathématiques.
	CERUTTI	: Chimie Appliquée.
MAITRES DE CONFERENCES	MM. BONNEAU	: Astronomie.
	THEOBALD J.G.	: Spectroscopie Hertzienne.
	PARIZET	: Mathématiques.
	HARTMANN	: Physique.
CHARGES D'ENSEIGNEMENT	M. REMOND	: Chronométrie.
	MASSONIE	: Mathématiques.
CONSEILLER ADMINISTRATIF UNIVERSITAIRE.	M. LAMBERT	

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION.	I à III
CHAPITRE I : Problèmes posés et moyens d'étude.	1 à 6
1-1 - Problèmes concernant les engrenages de micromécanique et d'horlogerie.	
1-2 - Qualités recherchées.	
1-3 - Perfectionnements déjà apportés aux engrenages.	
1-4 - Moyens mis en oeuvre pour cette étude.	
1-5 - Conclusions.	
CHAPITRE II : Etude du frottement et des déformations.	7 à 23
2-1 - Etude du frottement.	
2-10 - Importance du frottement.	
2-11 - Détermination indirecte du frottement dans les engrenages.	
2-12 - Variations de couple dûes au frottement.	
2-13 - Mesure du frottement sur la machine de traction Instron.	
2-14 - Conclusions.	
2-2 - Etude de la flexion des dents.	
2-21 - Etude de la flexion par photoélasticimétrie bidimensionnelle.	
2-22 - Détermination des contraintes principales dans la section minimum des ailes de pignon.	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547627_0020

2-23 - Etude de la flexion des dents par extensométrie.

2-24 - Conclusions.

CHAPITRE III : Influence de l'entraxe et de la forme des dents sur la transmission de l'énergie. 24 à 29

3-1 - Observation des différents défauts.

3-2 - Premières modifications de profils.

3-3 - Conclusions.

CHAPITRE IV : Profils elliptiques. 30 à 44

4-1 - Définitions.

4-11 - Définition de l'épicycloïde elliptique.

4-12 - Définition de l'hypocycloïde elliptique.

4-13 - Courbes secondaires.

4-2 - Equation de l'épicycloïde elliptique.

4-3 - Exemple de détermination analytique d'un profil point par point.

4-4 - Construction géométrique.

4-5 - Définition de l'engrenage "hypo-épicycloïdal elliptique".

4-51 - Détermination du profil.

4-52 - Caractéristiques dimensionnelles.

4-6 - Définition de l'engrenage épicycloïdal elliptique.

4-61 - Détermination du profil.

4-62 - Caractéristiques dimensionnelles.

4-63 - Détermination de λ' et de l'angle de pression fictif α_f.

4-7 - Excentricité maximum des ellipses génératrices.

4-8 - Valeurs théoriques des dimensions des engrenages épicycloïdaux elliptiques.

4-81 - Calcul des rayons de raccordement.

4-82 - Calcul du diamètreà fond de denture.

4-83 - Calcul du diamètre extérieur.

4-9 - Résultats expérimentaux

CONCLUSION. 45 à 46

-=-=-=-=-=-=-

INTRODUCTION

Un organe mécanique tel qu'un engrenage possède déjà plusieurs siècles d'histoire, et l'on peut penser que sa théorie est définitivement établie et son fonctionnement complètement déterminé. On sait aussi que les profils cycloïdaux furent les premiers à bénéficier d'une définition mathématique rigoureuse due à Pascal et Philippe de la Hire dès le XVIIe siècle. Les engrenages cycloïdaux ont été vite abandonnés au profit des engrenages en développante dans la plupart des mécanismes.

Cependant les engrenages de micromécanique, principalement les engrenages multiplicateurs, revêtent un caractère très particulier à cause de leur faible module et à cause des faibles puissances mise en jeu. Néanmoins, ils vérifient les mêmes équations générales que les autres engrenages.

Aux difficultés précédemment citées, s'ajoutent des exigences de plus en plus sévères : recherche d'une miniaturisation toujours plus poussée, d'un rendement maximum, d'une fabrication facile et rapide, d'une sécurité totale de fonctionnement.

Il n'est pas besoin d'énumérer ici tous les travaux déjà effectués ayant pour but d'améliorer l'une ou l'autre des qualités de ces engrenages. En effet l'amélioration simultanée de toutes les qualités est presque impossible, car on s'aperçoit très vite qu'elles entraînent des incompatibilités.

Dans le travail présenté ici, travail faisant suite à une étude entreprise par un groupe d'élèves-ingénieurs de l'ENSCMB, nous considérons le cas très particulier des engrenages multiplicateurs avec pignon peu nombré, auxquels il est demandé une trans-

mission régulière de l'énergie, compte non tenu des fluctuations de vitesse.

Dans une première partie, nous étudions les différents facteurs qui ont une influence sur la continuité du couple transmis par des engrenages normalisés. Le premier chapître apporte davantage de détails sur les problèmes posés et présente les moyens mis en oeuvre pour effectuer nos recherches.

Le deuxième chapître est un développement plus approfondi de deux phénomènes inhérents au fonctionnement de tous mécanismes : le frottement et les déformations. Le but de ce chapître est de préciser la contribution de ces deux phénomènes à la mauvaise transmission de l'énergie.

Un troisième chapître est consacré à l'étude de l'influence de l'entraxe et de la forme géométrique des dents sur la transmission de l'énergie. Cette étude nous conduira à une modification des profils qui consiste essentiellement en une augmentation des rayons de courbures.

Enfin, dans une deuxième partie, nous définissons des engrenages dont les profils sont obtenus à partir de courbes génératrices elliptiques. Ces engrenages nous ont paru très intéressants du fait qu'ils possèdent les qualités fondamentales recherchées pour une bonne transmission et une fabrication relativement aisée. Ces qualités étant une faible sensibilité aux défauts d'entraxe, des dents robustes, un diamètre de noyau important pour les pignons, et une possibilité de définition mathématique rigoureuse des profils.

Les numéros entre crochets qui se trouvent dans le cours

du texte correspondent aux références bibliographiques ; chaque chapître se terminant par sa propre bibliographie.

D'autre part, les figures et les formules sont repérées par des numéros entre parenthèses, et les notations employées dans le chapître II sont groupées à la fin de ce chapître.

-=-=-=-=-=-=-

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à

Monsieur le Professeur CHALEAT, Directeur du Laboratoire de Mécanique Appliquée pour l'attention permanente qu'il a apportée à mes études et pour les notes personnelles qu'il m'a communiquées,

Monsieur le Professeur MESNAGE, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micromécanique qui m'a permis de travailler avec le matériel de cette école,

Monsieur le Professeur VALLEE qui m'a fait l'honneur de participer au jury.

J'adresse également ma plus vive reconnaissance à Monsieur OULET, promoteur de cette étude, qui n'a cessé de me conseiller et de m'encourager.

Je me dois aussi de remercier Monsieur BURTH, Directeur technique de l'"HORLOGERIE DE SAVOIE, et Monsieur BINETRUY, Directeur technique des Etablissements PARRENIN, qui ont accepté de réaliser, à titre d'essai, différents modèles d'engrenages.

Il m'est agréable de signaler l'importante contribution du personnel des Laboratoires d'Analyse Numérique et de Mécanique Appliquée, et notamment des mécaniciens qui ont effectué les travaux d'atelier et de Mademoiselle PERRIN qui s'est chargée de la frappe du manuscrit.

-=-=-=-=-=-

RECHERCHES SUR LA TRANSMISSION DE L'ENERGIE PAR ENGRENAGES EN MICROMECANIQUE.

PERFECTIONNEMENT AUX ENGRENAGES EPICYCLOIDAUX.

CHAPITRE I

PROBLEMES POSES ET MOYENS D'ETUDE.

1-1 - Problèmes concernant les engrenages de micromécanique et d'horlogerie.

La transmission de l'énergie de façon continue par des engrenages soulève des difficultés, et les nombreuses études qui ont été effectuées n'ont pas toujours été couronnées de succès. Les plus grandes difficultés se présentent lors de la transmission d'énergie par des engrenages multiplicateurs très répandus en horlogerie. Les discontinuités dans la transmission du couple moteur sont surtout néfastes en raison d'une part de la faible vitesse de rotation des mobiles et d'autre part de leur répercussion directe sur l'amplitude du balancier donc sur la marche de la montre.

Des mesures à l'amplitudographe ont permis de mettre en évidence les discontinuités de couple introduites par le rouage entre le barillet et l'échappement. La figure (I-1) donne un exemple d'enregistrement.

Tout d'abord, il est difficile de reproduire avec une bonne précision sur une machine à tailler un profil déterminé. De plus, il est indispensable qu'un choix judicieux du profil ait été effectué auparavant. Le seul moyen efficace utilisable pour contrôler une fabrication est le projecteur de profil. Mais bien que d'un secours très précieux dans l'industrie il apporte peu d'information sur les conditions de fonctionnement de l'engrenage.

1-2 - Qualités recherchées.

La qualité fondamentale d'un engrenage de micromécanique est d'assurer une transmission régulière de l'énergie indépendamment

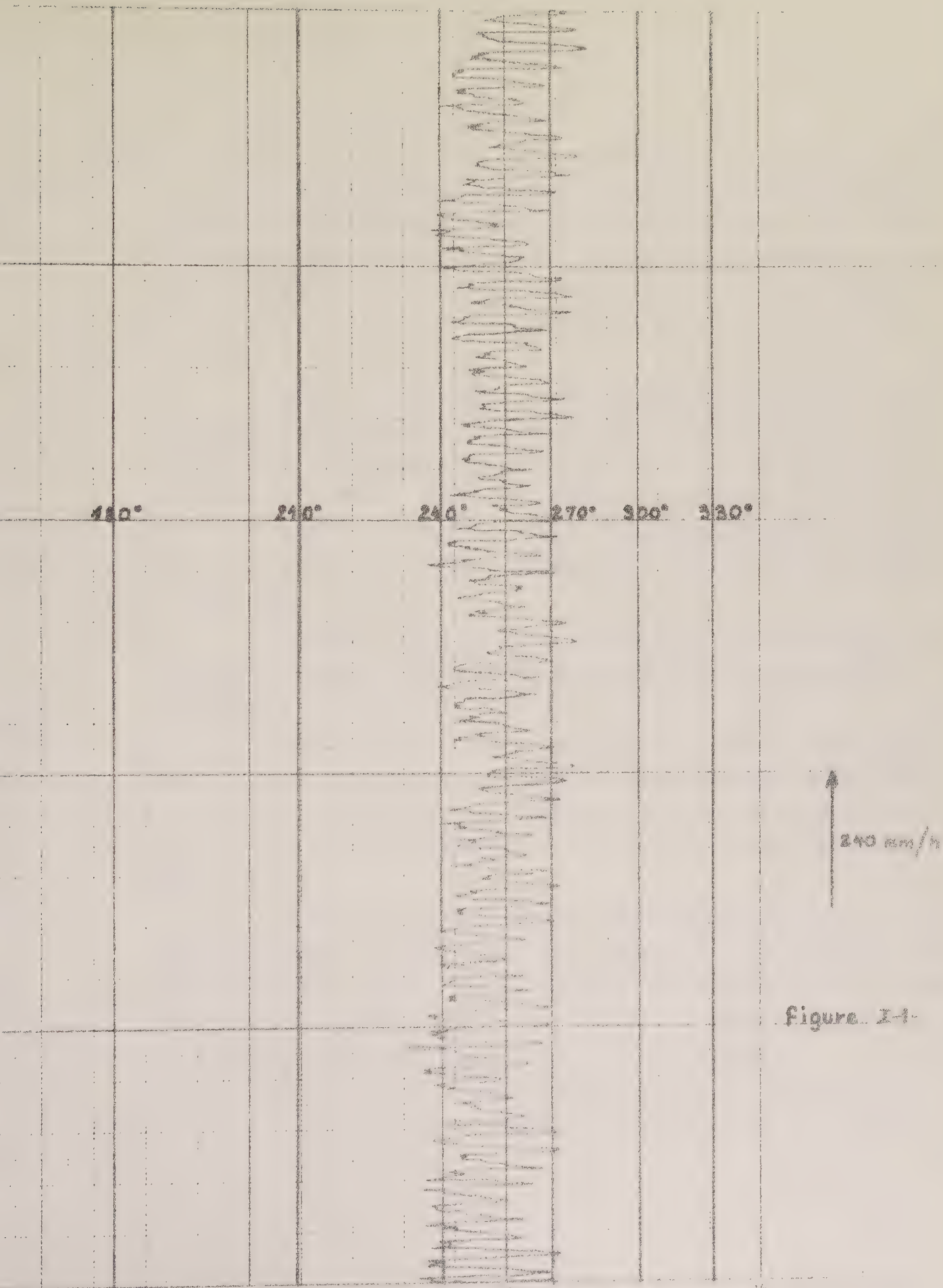


Figure I-1

de certains facteurs plus ou moins contrôlables tels que le frottement et les déformations. En outre, tout risque d'arcboutement ou de chute (perte de contact) doit être écarté. Ces deux points sont d'ailleurs liés l'un à l'autre, car une bonne transmission du mouvement implique une bonne transmission de l'énergie et réciproquement. De plus, en ce qui concerne le rendement, les frottements doivent être réduits au minimum.

Enfin, d'autres qualités, secondaires en apparence mais néanmoins aussi importantes, doivent être recherchées car il s'agit de faciliter au maximum la fabrication. Pour cela il faut des dents très rigides avec des pieds suffisamment larges pour réduire le plus possible les risques de déformations, lesquelles peuvent se produire aussi bien pendant l'usinage que pendant le fonctionnement normal de l'engrenage.

Toujours en raison de la fabrication, des tolérances suffisamment larges doivent être admises sans toutefois perturber la bonne marche du mécanisme.

Ce dernier point est très délicat car chacun sait qu'il est très difficile de réaliser en série des engrenages d'horlogerie tout en respectant des cotes rigoureuses . En effet, la précision des machines n'est pas proportionnelle aux dimensions des pièces usinées [5] .

Un dernier point à considérer est l'existence de jeux assez importants qui constituent une sécurité de fonctionnement indispensable dans tous les appareils tels que montres, ou autres micromécanismes de ce genre.

1-3 - Perfectionnements déjà apportés aux engrenages.

Ce qui précède donne un aperçu des difficultés que présentent les engrenages d'horlogerie et principalement les engrenages

multiplicateurs. Depuis très longtemps les engrenages cycloïdaux sont utilisés en horlogerie, parfois même de préférence aux engrenages en développantes [1] et ils ont subi maintes modifications dont l'intérêt a été démontré de façon plus ou moins empirique [5] .

Plusieurs séries de normes résultent de différentes études. Les principales sont les normes horlogères suisses (NHS) perfectionnées depuis leur publication en 1928, les normes CETEHOR, très voisines des précédentes, les normes E.V.J. suisses qui présentent l'avantage de nécessiter, pour le taillage, une seule fraise par module (avantage discutable).

Actuellement, des études sont en cours notamment en Suisse et le comité ISO/TC 60 a confié à son Groupe de Travail 1, la tâche d'étudier les engrenages de petite mécanique et d'horlogerie [6] . Malgré le nombre et la diversité des normes existantes,de nombreux fabricants d'ébauches apportent leurs propres modifications et éprouvent le besoin pressant d'améliorations nouvelles.

Notons que les problèmes exposés dans le paragraphe précédent ne se posent pas systématiquement à tous les engrenages mais particulièrement aux engrenages multiplicateurs à grand rapport utilisés dans les petits calibres.

1-4 - Moyens mis en oeuvre pour cette étude.

L'étude de ces engrenages en grandeur réelle présente des difficultés du fait de leurs très petites dimensions. En effet, leur module est compris entre 0,07 et 0,18 mm. Seuls l'amplitudographe et le projecteur de profil permettent de contrôler la qualité d'un engrenage réel, mais malheureusement, ils se prêtent mal à l'analyse du fonctionnement. Dans le passé, la majorité des études ont été

effectuées avec des dessins à grande échelle. Mais cette méthode, bien que très utile, s'avère encore insuffisante. Ainsi, pour analyser le fonctionnement d'un couple d'engrenages et les différents phénomènes qui l'accompagnent, Monsieur OUDET eut l'idée très précieuse de réaliser des maquettes à l'échelle 100/1 ou 200/1 et de faire appel à des moyens d'investigation plus enrichissants que les précédents. C'est ainsi que la photoélasticimétrie et l'extensométrie se sont montrées particulièrement efficaces. Le montage expérimental est très simple et la photographie I-2 donne une vue d'ensemble des appareils utilisés pour cette étude.

Par extensométrie [4] on enregistre directement les variations de couple sur l'axe du pignon pendant qu'un couple constant est appliqué à la roue. Le banc photoélasticimétrique permet de visualiser, ou d'enregistrer, la nature des contacts, la ligne d'action, les menées simultanées, les glissements, les déformations et même les frottements.Tous ces phénomènes étant à considérer pour une étude complète de l'engrènement. Le montage permet des enregistrements continus, pendant une menée complète.

Les premières mesures ont été effectuées sur un couple pignon de moyenne roue de centre, taillée dans de l'araldite au module 18 mm. Le pignon a 7 dents et la roue 70, leur profil étant celui donné par les normes NHS,profil B pour le pignon. La figure (I-3) fait apparaître la discontinuité du couple, qui se produit au changement de dent, sur l'axe du pignon, et ceci pour plusieurs valeurs de l'entraxe. La photographie I-4 prise au moment du changement de dent laisse apparaître une des causes probables de la discontinuité enregistrée.

1-5 - Conclusions.

A la suite des premières mesures mentionnées ci-dessus,

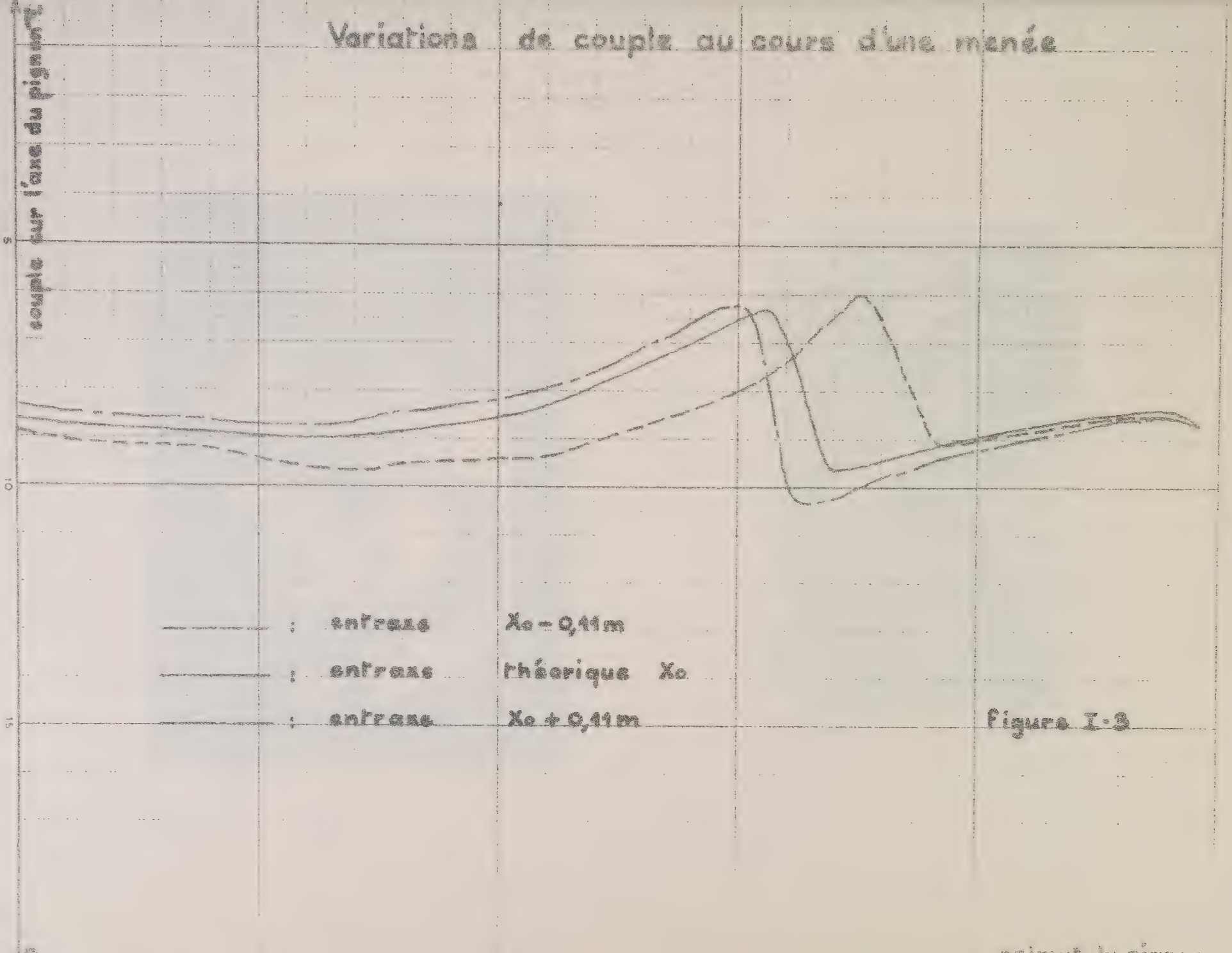
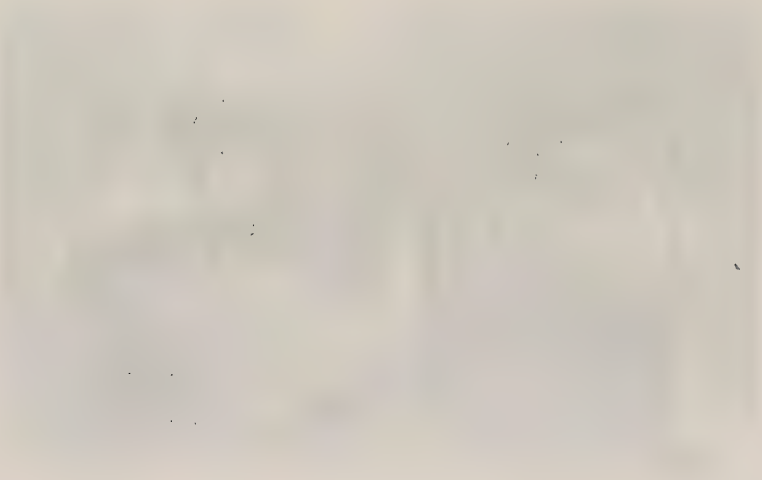

Variations de couple au cours d'une menée
couple sur l'axe du pignon
5
10
15
: entraxe Xo - 0,11m
: entraxe théorique Xo
: entraxe Xo + 0,11m

Figure I-3

Figure I - 2

Figure I - 4



on doit résoudre le problème suivant : déterminer un profil qui assure une transmission de l'énergie aussi continue que possible, tout en conservant une sécurité suffisante de fonctionnement (pas de chute ni d'arc-boutement) et une même facilité d'exécution. On se limitera d'abord dans la résolution de ce problème au cas du couple centre-moyenne (nombres de dents $Z = 70$, $Z' = 7$).

Auparavant une étude du frottement et de la flexion des dents permettra de savoir si ces deux phénomènes jouent un rôle primordial ou secondaire dans la régularité de la transmission de l'énergie. En effet, certains expérimentateurs les soupçonnaient d'avoir une action néfaste et leur attribuaient une importance notable. Bien entendu, leur existence est certaine, et cette mise au point fera l'objet du deuxième chapitre.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

[1] R. SONZOGNO : "Norme provisoire pour les engrenages en développante pour l'horlogerie et les petits mécanismes". Production Horlogère Française n° 10, octobre 1954.

[2] BAINVILLE et CAILHOL : "Etude graphique du fonctionnement des engrenages d'horlogerie. (Travail de diplôme scientifique, 1963).

[3] CAILLE et ROSAZ : "Etude du rendement des engrenages". (Travail de diplôme scientifique, 1964).

[4] U. ZELBSTEIN : "Technique et utilisation des jauges de contrainte". Dunod, Paris, 1956.

[5] P. LANGUE : "La miniaturisation dans l'industrie horlogère". La Machine-Outil Française, mai 1963, p. 105-133.

[6] H.L. DEBY : Annexe au cours d'engrenages donné en 1965, à l'intention des membres du groupe de travail pour l'étude des engrenages d'horlogerie, au Laboratoire Suisse de Recherches Horlogères.

CHAPITRE II.

ETUDE DU FROTTEMENT ET LES DEFORMATIONS

2-1 - Etude du frottement.

2-10 - Importance du frottement.

Dès que deux éléments mécaniques sont en contact et en mouvement relatif, le phénomène de frottement intervient. Que ce soit en mécanique générale ou en micromécanique, le frottement a une importance qu'il ne faut pas sous estimer. En effet, il intervient directement dans le rendement du mécanisme (engrenages par exemple pour citer seulement le cas qui nous préoccupe) et il conditionne aussi directement le fonctionnement du système (échauffement des parties en contact et détérioration des états de surfaces).

Certes le coefficient de frottement a déjà fait l'objet de nombreuses études nécessitées par le nombre et la complexité des facteurs qui s'introduisent. Les principaux facteurs dont dépend le coefficient de frottement sont :

- la nature des matériaux des parties en contact,
- la qualité des surfaces en contact,
- la pression de contact,
- la variable temps,
- le lubrifiant lorsqu'il s'agit de frottement médiat,
- la température.

Le frottement mérite donc une étude spéciale pour chaque cas particulier déterminé par les conditions de fonctionnement. La présente étude montre l'importance du frottement dans les engrenages

vis-à-vis des autres défauts de ceux-ci.

Tout d'abord le coefficient de frottement est fonction de la vitesse de glissement. Depuis longtemps des chercheurs ont essayé de définir mathématiquement et expérimentalement les variations de f en fonction de la vitesse [3] . C'est ainsi que BOCHET propose, dans le cas du frottement immédiat (frottement sec), la fonction suivante :

$$f = \frac{f_o - f_\infty}{1 + av} + f_\infty$$

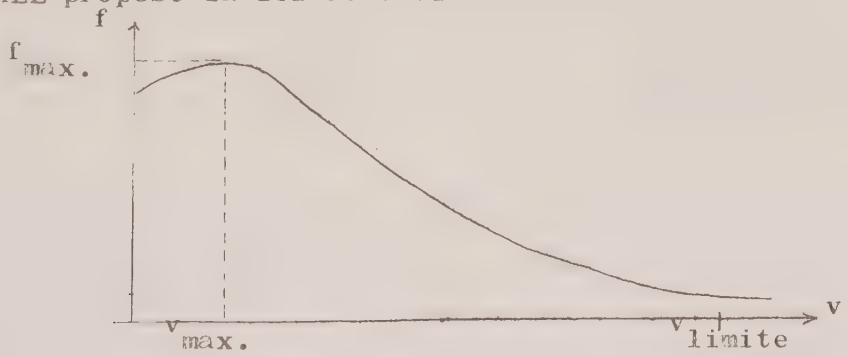
où f_o et f_∞ sont respectivement les valeurs de f correspondant à une vitesse nulle et à une vitesse infinie, et où a est une constante.

GALTON propose pour ce même cas, la fonction :

$$f = \frac{a}{b + v}$$

a et b étant deux constantes, de plus il observe que le frottement diminue avec le temps, ce qu'il attribue à l'échauffement.

KIMBALL propose la loi de variation suivante :



Il apparaît ici une vitesse critique v_{max} pour laquelle le coefficient de frottement est maximum.

Récemment, l'influence du lubrifiant sur le coefficient de frottement dans les engrenages a été étudiée par J.A. MISHARIN d'une part et par G.H. BENEDICT et E.W. KELLEY d'autre part [6], [7] . Ces expérimentateurs ont utilisé des appareils simulateurs à disques et ils ont abouti aux conclusions suivantes [1] :

- le coefficient de frottement f diminue lorsque la viscosité du lubrifiant augmente.
- f semble ne varier que très peu jusqu'à une certaine charge, puis augmente ensuite lorsque la charge augmente.
- f diminue lorsque la vitesse de glissement augmente.

Pour le cas très particulier des engrenages d'horlogerie et de micromécanique les diverses grandeurs à considérer ont une amplitude très faible ; néanmoins, leurs variations relatives sont parfois très importantes. Dans ces petits mécanismes, on doit considérer principalement les variations de la pression de contact et les variations de vitesse, car il s'agit d'abord d'un frottement immédiat.Les autres facteurs variant très lentement dans le temps peuvent être considérés comme constants, du moins pour une première étude.

Les variations de vitesse et de pression de contact sont liées plus ou moins directement aux variations du couple transmis, ce qui explique l'importance de ces dernières. Ainsi, deux séries d'expériences ont été effectuées pour étudier le rôle du frottement dans les engrenages:

a) des mesures indirectes à l'aide du montage décrit au paragraphe 1-4 qui ont permis de déterminer le coefficient de frottement en s'appuyant sur la théorie des cames.

b) des mesures directes sur la machine de traction Instron.

2-11 - Détermination indirecte du frottement dans les engrenages.

Il faut remarquer immédiatement que cette méthode de mesure n'est applicable qu'à grande échelle, il est en effet inconcevable de réaliser toutes les mesures nécessaires sur un micromécanisme. Il faut remarquer également que la transposition des valeurs trouvées ne peut pas être faite au mécanisme réel puisque les matériaux utilisés ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Cependant, les résultats trouvés par les mesures à grande échelle permettent de juger de l'importance du frottement, vis àvis des autres défauts existant éventuellement, puisque toutes les mesures sont effectuées dans les mêmes conditions.

Le rapport des couples est exprimé par la formule suivante [5] :

$$k = \frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{R' \sin (\alpha \pm \varphi) - p \sin \varphi}{R \sin (\alpha \mp \varphi) + p \sin \varphi} \qquad \text{(II-1)}$$

Dans cette expression :

Γ' : couple recueilli sur l'axe au pignon,

Γ : couple appliqué à la roue,

R' : distance du centre instantané de rotation au centre du pignon,

R : distance du centre instantané de rotation au centre de la roue,

p : distance du centre instantané de rotation au point de contact,

φ : angle de frottement,

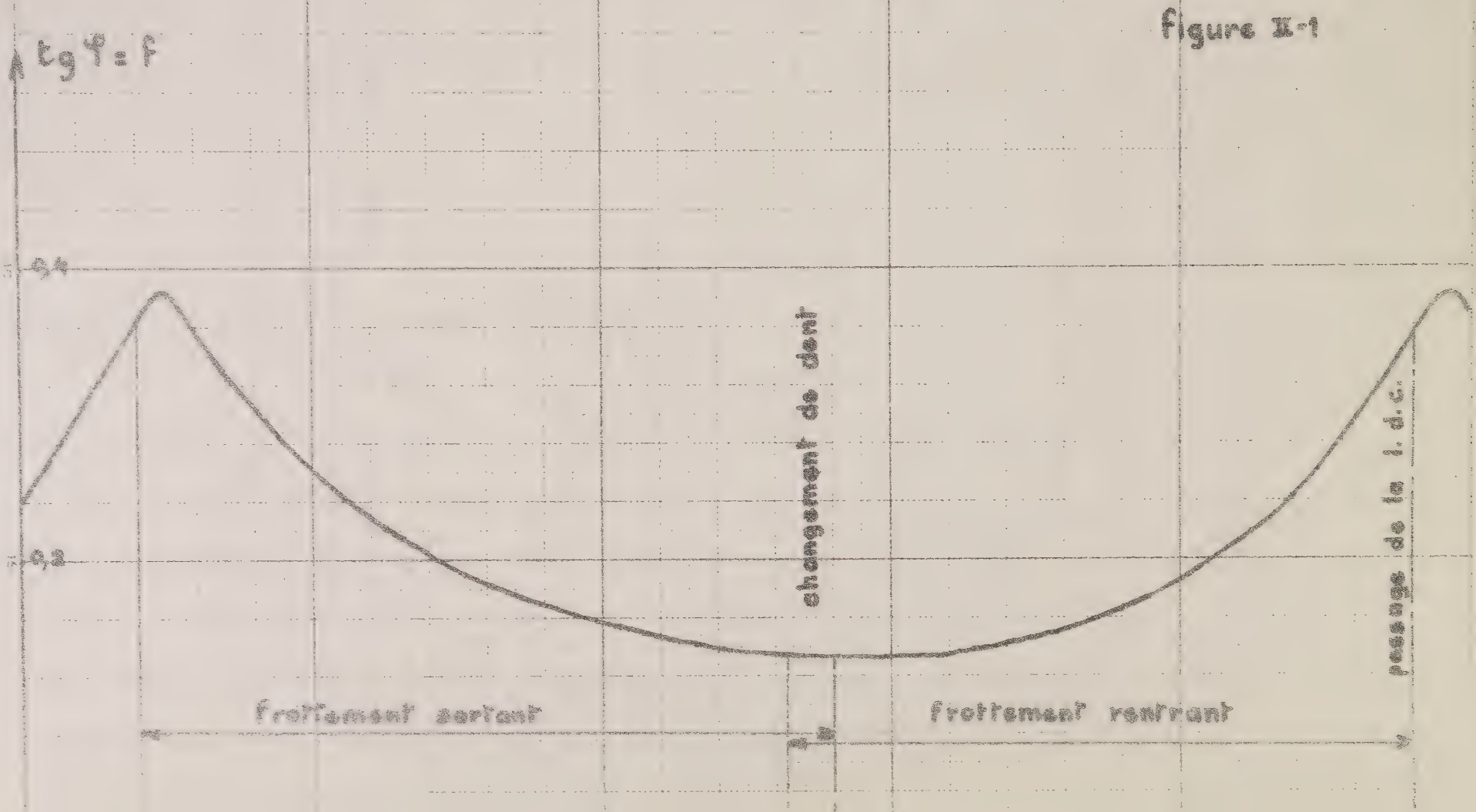
α : angle aigu formé par la ligne des centres et la normale commune aux deux profils en contact

La formule (II-1) peut être transformée de façon à faire apparaître plus nettement le coefficient de frottement $f = tg\,\varphi$, soit :

$$f = tg\,\varphi = \frac{(R' - kR) \sin \alpha}{p\,(k + 1) \mp (R' - kR) \cos \alpha} \qquad \text{(II-2)}$$

Variations du frottement pendant une menée.

figure X-1



La détermination de f ne présente alors aucune difficulté, le couple Γ appliqué à la roue est connu et on enregistre le couple Γ' recueilli à chaque instant sur l'axe du pignon, d'où la valeur de k. D'autre part, avec le photoélasticimètre, on relève aisément la ligne d'engrènement et les positions successives du centre instantané de rotation, cet enregistrement permet de mesurer R', R, α et p. Enfin, en remplaçant dans la formule (II-2), il est facile de suivre les variations de f pendant une menée complète. La figure (II-1) fait apparaître ces variations pour un couple d'engrenages 70-7 en araldite, réalisé au module 18 mm avec des profils NHS et pour un entraxe de 695 mm.

De cette courbe résultent les remarques suivantes. Tout d'abord, il n'apparaît pas de différences importantes entre la valeur du frottement rentrant et la valeur du frottement sortant ; ensuite tg φ semble suivre fidélement les variations de $\frac{a}{p}$, c'est-à-dire que f est d'autant plus important que le contact a lieu plus près de la ligne des centres. A première vue, ce fait pourrait être attribué à une variation de la vitesse de glissement, mais les écarts sont trop grands pour qu'ils n'aient que cette cause pour origine, et une seconde expérience a montré qu'effectivement le frottement variait peu au cours d'une menée.

Pour faire cette vérification, on s'est imposé une valeur de f et à partir des mesures précédentes on a tracé la courbe représentant les variations du rapport $k = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ (figure (II-2)). L'allure de cette courbe se rapproche énormément de celle du couple enregistré par extensomètrie, et si l'on répète ces calculs pour différentes valeurs de f, on obtient plusieurs courbes sensiblement parallèles, ce qui signifie que f a une valeur bien déterminée (ici

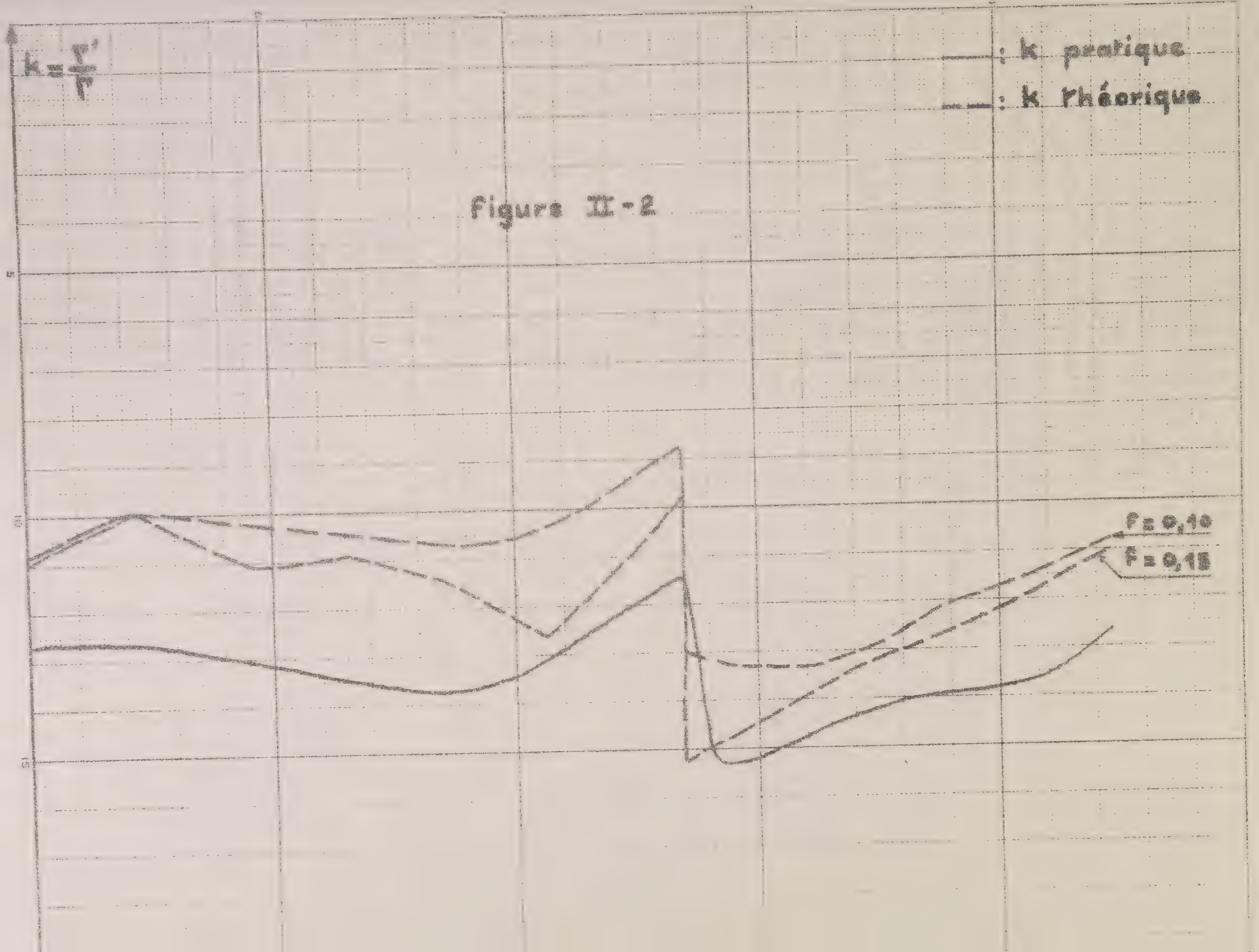


Figure II-2

voisine de 0,2) avec de très faibles variations au cours de la menée. La première méthode est néanmoins valable, à condition toutefois que les mesures soient extrêmement précises.

2-12 - Variations de couple dûes au frottement.

Calculons pour un couple d'engrenages donné, avec un profil bien déterminé, les variations du couple transmis dûes au frottement et ceci pour plusieurs valeurs de f.

Nous avons toujours la relation (II-1) qui, pour $\varphi = 0$, devient :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{R'}{R} \qquad \text{soit} \qquad \Gamma' = \Gamma \cdot \frac{R'}{R} \qquad \text{(II-3)}$$

pour $\varphi \neq 0$, Γ' est donné par (II-1)

$$\Gamma' = \Gamma \frac{R' \sin (\alpha \pm \varphi) - p \sin \varphi}{R \sin (\alpha \pm \varphi) + p \sin \varphi}$$

La variation de couple dûe au frottement est, en retranchant les expression précédentes :

$$\Delta\Gamma' = \Gamma \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{1}{1 + \frac{R}{p} \frac{\sin (\alpha \pm \varphi)}{\sin \varphi}} \qquad \text{(II-4)}$$

La variation relative de couple est donnée par :

$$\frac{\Delta\Gamma'}{\Gamma'} = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{p \sin \varphi}{R' \sin (\alpha \pm \varphi) - p \sin \varphi} \qquad \text{(II-5)}$$

Cette formule permet de calculer $\left(\frac{\Delta\Gamma'}{\Gamma'}\right)$ pour différentes valeurs de φ au premier et au dernier contact. Pour l'engrenage 70-7 NHS pignon profil C, les résultats sont les suivants :

φ	6°	8° 30'	11° 30'	14°	17°
f	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$\left(\frac{\Delta\Gamma'}{\Gamma'}\right)\%$	5,8	8,2	11,3	14,3	18,3

2-13 - Mesure du frottement sur la machine de traction Instron.

Précédemment, on a vu comment variait le coefficient de frottement au cours d'une menée et son action sur le couple transmis. Maintenant, il paraît intéressant de pouvoir donner une valeur numérique à ce coefficient dans différents cas de fonctionnement, à savoir une surface de contact plus ou moins grande, une pression de contact plus ou moins importante, des lubrifiants et des états de surface variables.

La machine de traction Instron du Laboratoire permet de mesurer la force nécessaire au déplacement relatif des deux éléments frottant.

Il s'agissait de déterminer la valeur du frottement dans l'engrenage maquette, c'est pourquoi les mesures ont été pratiquées sur des échantillons réalisés en araldite par les mêmes procédés d'usinage, afin d'obtenir des états de surface similaires. Tous les enregistrements ont été faits avec une vitesse de glissement de 50 cm/mn, car, pour des vitesses trop faibles, l'élasticité du fil de traction et les rugosités des surfaces engendraient des vibrations trop importantes.

Plusieurs séries de mesures ont été effectuées et résumées par les figures (II-3), (II-4), (II-5). Les conclusions sont les suivantes :

- le frottement varie très peu avec l'étendue de la surface de contact, seul le frottement statique (ou le frottement au démarrage) est plus important pour des grandes surfaces de contact.

- lorsque la pression de contact augmente, le coefficient de frottement reste sensiblement le même jusqu'à une certaine valeur de cette pression qui produit le grippage ; à cet instant, le frottement devient pratiquement infini.

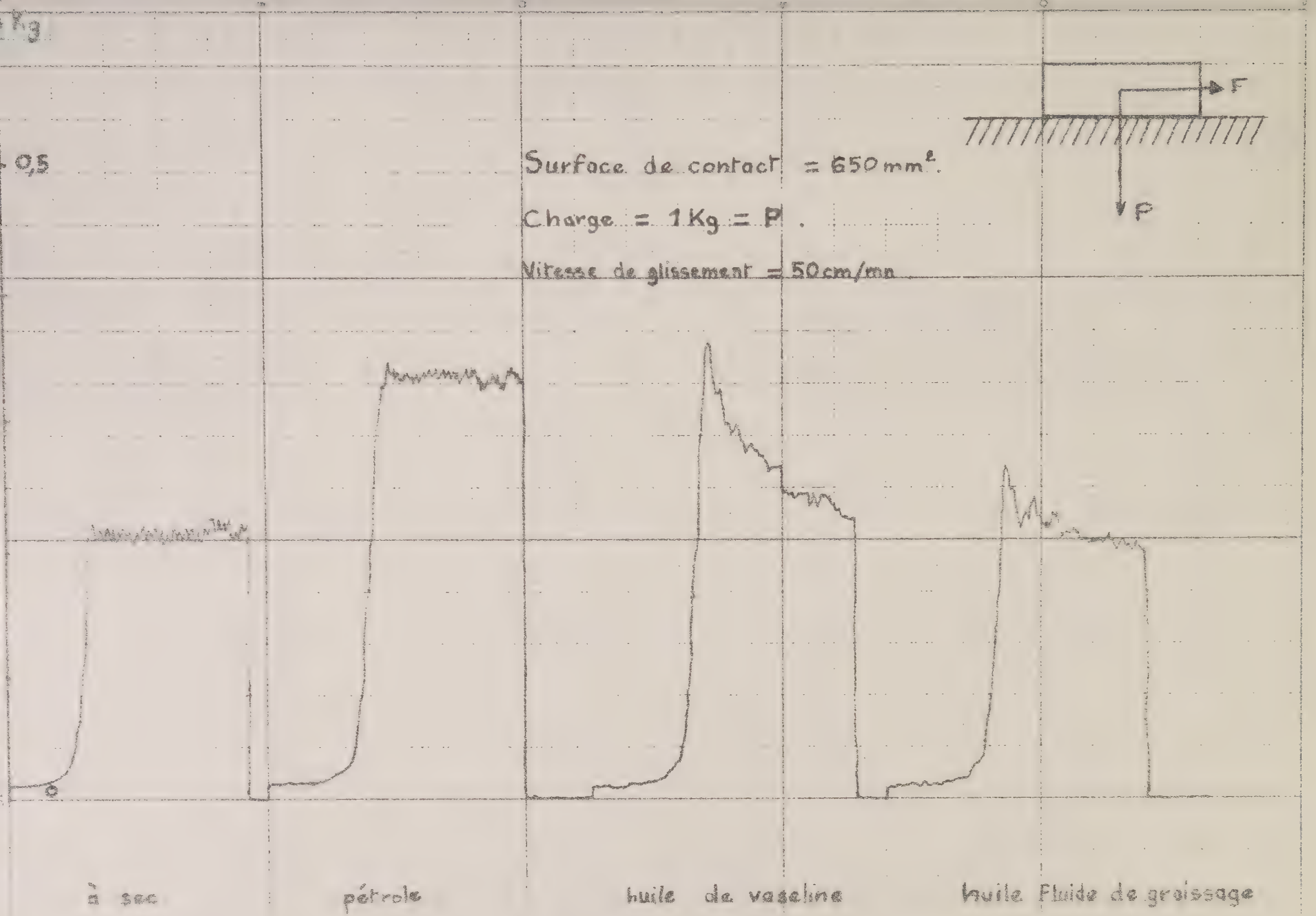

F
P
Surface de contact = 650 mm².
Charge = 1 Kg = P .
Vitesse de glissement = 50 cm/mn
0,5
à sec
pétrole
huile de vaseline
huile Fluide de graissage

Figure II-3

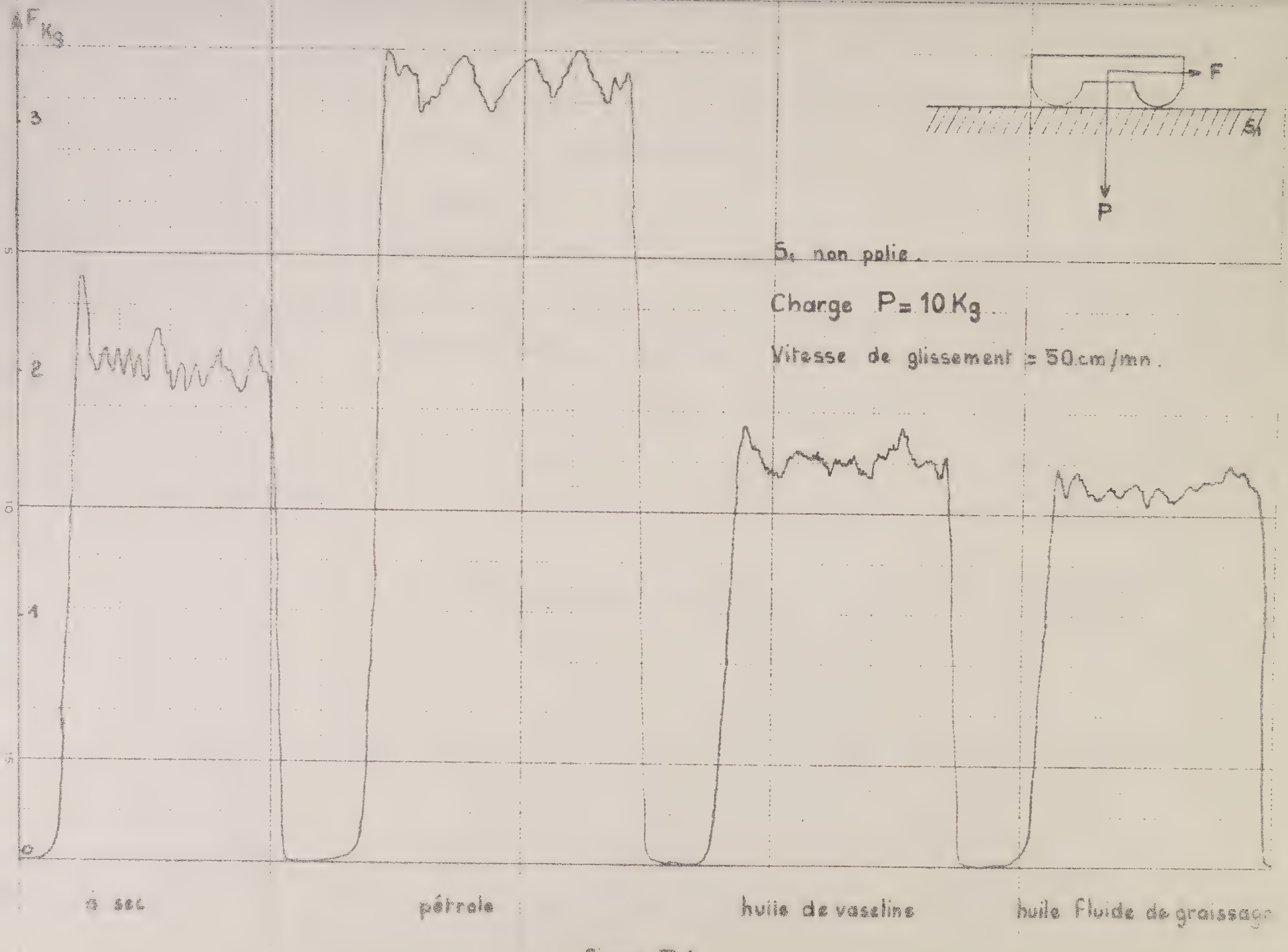

F Kg
3
2
1
0
F
P
S1 non polie.
Charge P = 10 Kg
Vitesse de glissement = 50 cm/mn
à sec
pétrole
huile de vaseline
huile Fluide de graissage

Figure II-4

Figure II-5

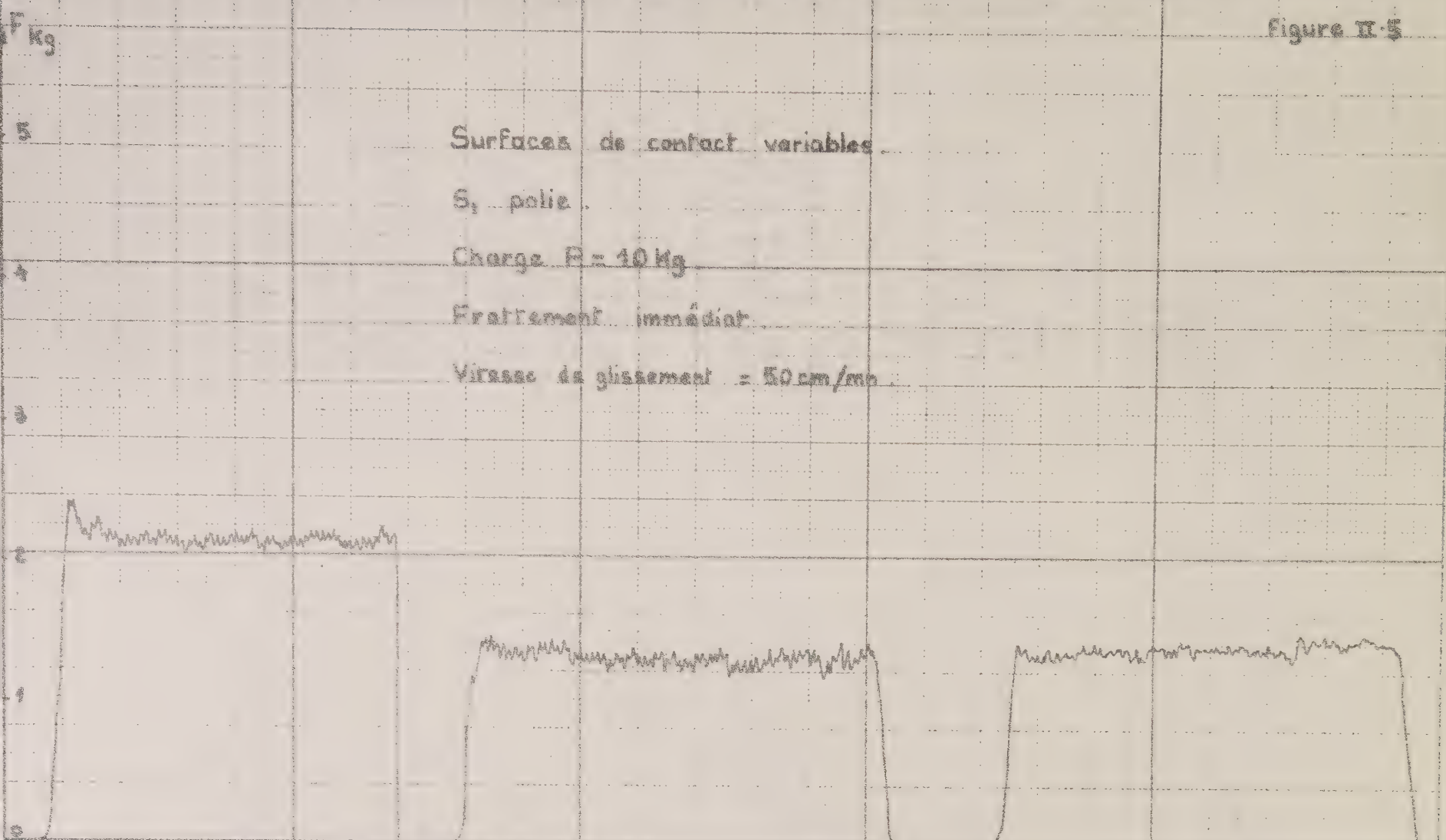
Surfaces de contact variables

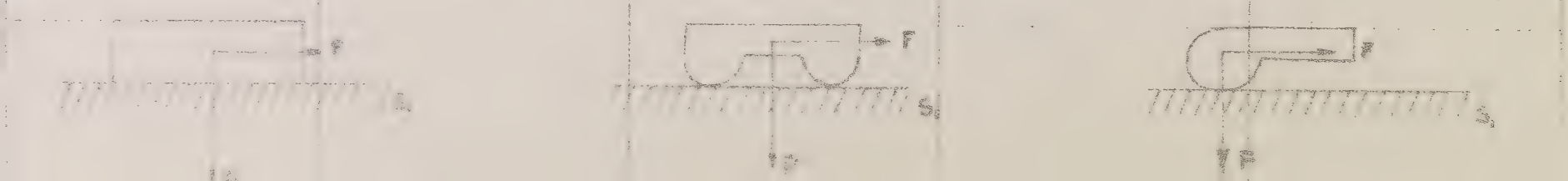
S_1 poli

Charge P = 10 kg

Frottement immédiat

Vitesse de glissement = 50 cm/mn





- dans le cas du frottement médiat, on remarque que le pétrole augmente le coefficient de frottement dynamique, que l'huile augmente le frottement statique et diminue le frottement dynamique. En effet, avec de l'huile, la force nécessaire au démarrage est supérieure à celle néssaire au maintien du mouvement, car le régime hydrodynamique ne s'introduit qu'au bout de quelques fractions de seconde [2] .

- dans le cas du frottement immédiat la valeur du coefficient de frottement s'écarte très peu de 0,2, cette valeur coïncide bien avec celle trouvée au paragraphe (II-11).

2-14 - Conclusions.

De cette étude succinte du frottement, il ressort principalement deux faits. D'une part, il apparaît que le frottement dans les seules dentures ne varie pas de façon notable au cours d'une menée et que la valeur du coefficient de frottement est sensiblement la même en frottement rentrant et en frottement sortant.

De cette conclusion, il résulte que si le frottement est indéniablement un inconvénient pour le mécanisme, son effet doit affecter le rendement et non les variations absolues du couple transmis. Ceci est valable dans une certaine mesure, car selon L. DEFOSSEZ [6] "Puisque le frottement varie avec le temps, nous pouvons affirmer que le problème de la transmission absolument régulière de l'énergie est insoluble". Néanmoins,on pourra considérer le problème résolu quand seules subsisteront les irrégularités de transmission dûes au frottement.

Par ailleurs, il peut s'établiravant la ligne des centres, un contact du flanc d'une dent avec l'arrondi de l'aile, et résulter de ce fait un arc-boutement souvent assez prononcé. C'est cet

arc-boutement, observé par les horlogers, qui leur a fait fréquemment exagérer l'importance du frottement des engrenages avant la ligne des centre. Le calcul prouve,en effet, que la différence entre ce qu'on appelle le frottement "rentrant" et le forttement "sortant" est minime et les écarts observés proviennent des défauts d'usinage.

2-2 - Etude de la flexion des dents.

Pendant le fonctionnement de l'engrenage, les dents sont soumises à des efforts et elles se déforment. Mais il s'agit de savoir si les déformations subies par les dents du pignon ou de la roue ont une influence importante ou non sur la régularité de la transmission de l'énergie. Ce phénomène a été étudié de deux manières.

2-21 — Etude photoélastique.

D'abord on a cherché par voie photoélasticimétrique s'il existait une relation entre les variations de l'énergie de déformation des ailes du pignon et les variations de l'énergie transmise à l'axe du pignon. Les photographies (II-6), (II-7), (II-8), (II-9),(II-10), (II,11) prises successivement au cours d'une même menée et représentant les isochromes dans les deux dents en contact montrent clairement les variations de contraintes dans ces dents. Plus particulièrement dans les ailes du pignon, car leurs dimensions en font les éléments les plus sensibles.

Considérons alors les ailes du pignon ; sur les photographies (II-6) et (II-7) prises pendant la conduite avant la ligne des centres, il n'y a pratiquement aucune différence entre les deux réseaux d'isochromes, ce qui signifie que l'état de contrainte de l'aile du pignon demeure sensiblement constant tout au long de la conduite avant la ligne des centres. Sur la photographie (II-8) prise au moment du passage sur la ligne des centres, le

fig II 6

Contact avant
la ligne des
centres

fig II 7

Contact avant
la l.d.c

fig II 8

Contact sur
la l.d.c

fig II 11

Contact apres

la l.d.c

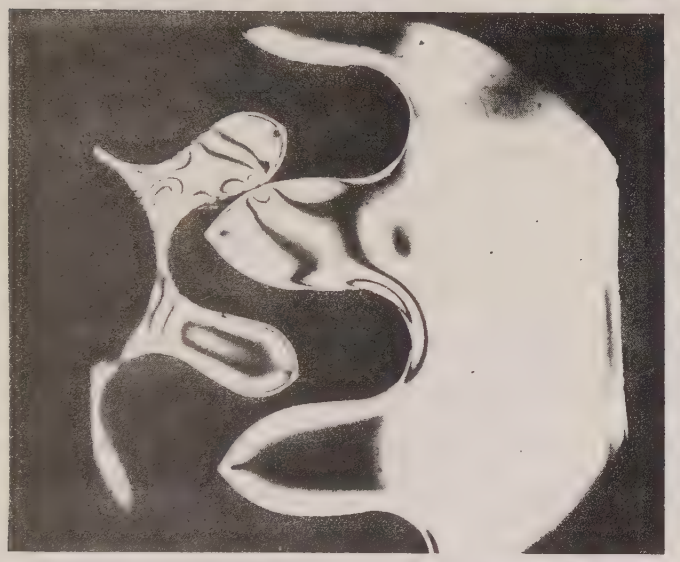


fig II 10

Contact apres

la l.d.c

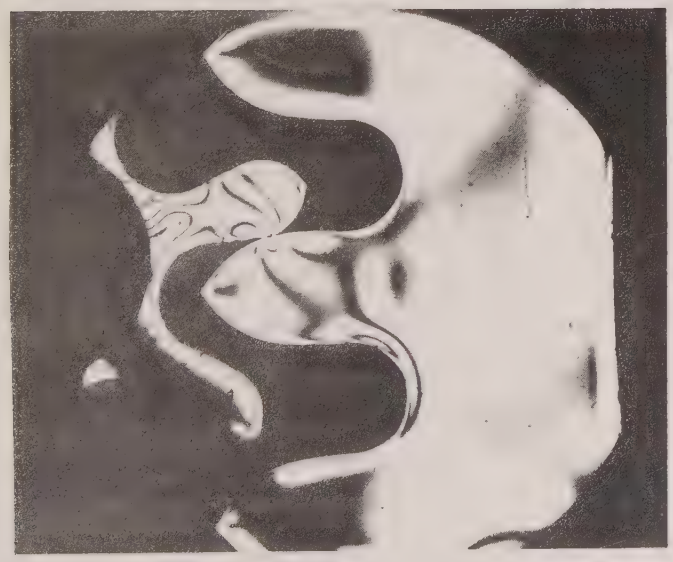


fig II 9

Contact apres

la l.d.c

réseau d'isochromes est plus dense que les précédents, ceci est facile à remarquer si l'on observe l'évolution de la frange d'ordre 2. Donc s'il apparaît davantage d'isochromes, c'est que la pression au point de contact a augmenté ou que le point de contact s'est déplacé. Enfin, sur les photographies (II-9), (II-10) et (II-11) prises pendant la conduite après la ligne des centres, on note encore un léger déplacement des isochromes par rapport à celle de la photographie (II-8), mais les trois photographies représentent des réseaux pratiquement identiques entre eux, donc l'état de contrainte de l'aile du pignon demeure constant pendant la conduite après la ligne des centres. Cet examen photoélastique permet de conclure que l'aile du pignon, au cours d'une menée complète, est soumise à un état de contrainte constant pendant la conduite avant la ligne des centres, que la contrainte augmente au passage de la ligne des centres et devient à nouveau constante, pendant la conduite après la ligne des centres. Il apparaît immédiatement, par simple comparaison avec l'enregistrement de la figure (I-3), que les variations des contraintes dans l'aile du pignon au cours d'une menée complète ne coïncident pas avec celles du couple Γ' mesurées sur l'axe du pignon.

De la photographie (II-6) à la photographie (II-11), les deux franges d'ordre 1, sur les dents de la roue, s'écartent de plus en plus, depuis le début de la menée jusqu'à la fin. Toujours en comparant avec la figure (I-3), on pourrait supposer que cet écartement progressif est dû à l'augmentation également progressive de la force transmise. Cependant, le nombre d'isochromes au point de contact est toujours le même, ce qui signifie que l'écartement précédent a pour seule origine, le déplacement du point de contact vers l'extrémité de la dent.

Selon certains [11] les variations continues d'énergie élastique de déformation pendant la menée, modifient le rapport des couples. En réalité, ce qui précède montre qu'il n'en est rien.

Il n'existe donc pas de relation évidente entre les déformations et les variations de l'énergie transmise. Du point de vue quantitatif, il est possible d'appliquer la théorie de la photoélasticimétrie à la détermination des variations de contraintes dans les dents. On se limitera cependant à une seule détermination, à titre d'exemple, préférant faire appel à l'extensométrie, pour avoir des résultats plus rapides et continus, bien que moins complets.

2-22 - Détermination des contraintes principales dans la section minimum des ailes de pignon.

Ce calcul correspond au cas de la photographie (II-6). Celle-ci donne le réseau d'isochromes et permet de tracer la courbe de variations de la différence des contraintes principales dans la section dangereuse de l'aile du pignon.

Le modèle est taillé dans une plaque d'Araldite B de 9,8 mm d'épaisseur ; la constante photoélastique de ce matériau est C = 0,95 kg/mm^2/frange/mm épaisseur. Cette constante correspond à la valeur de frange du matériau, la valeur de frange du modèle est :

$$C' = \frac{0,95}{9,8} = 0,097 \text{ kg/mm}^2\text{/frange}$$

La courbe obtenue avec ces valeurs est représentée par la figure (II-12).

La direction des contraintes principales est donnée par les deux réseaux d'isostatiques, lesquels sont obtenus à partir du réseau d'isoclines. Ces différents réseaux sont représentés sur les figures (II-13) et (II-14). Tous les éléments nécessaires à la

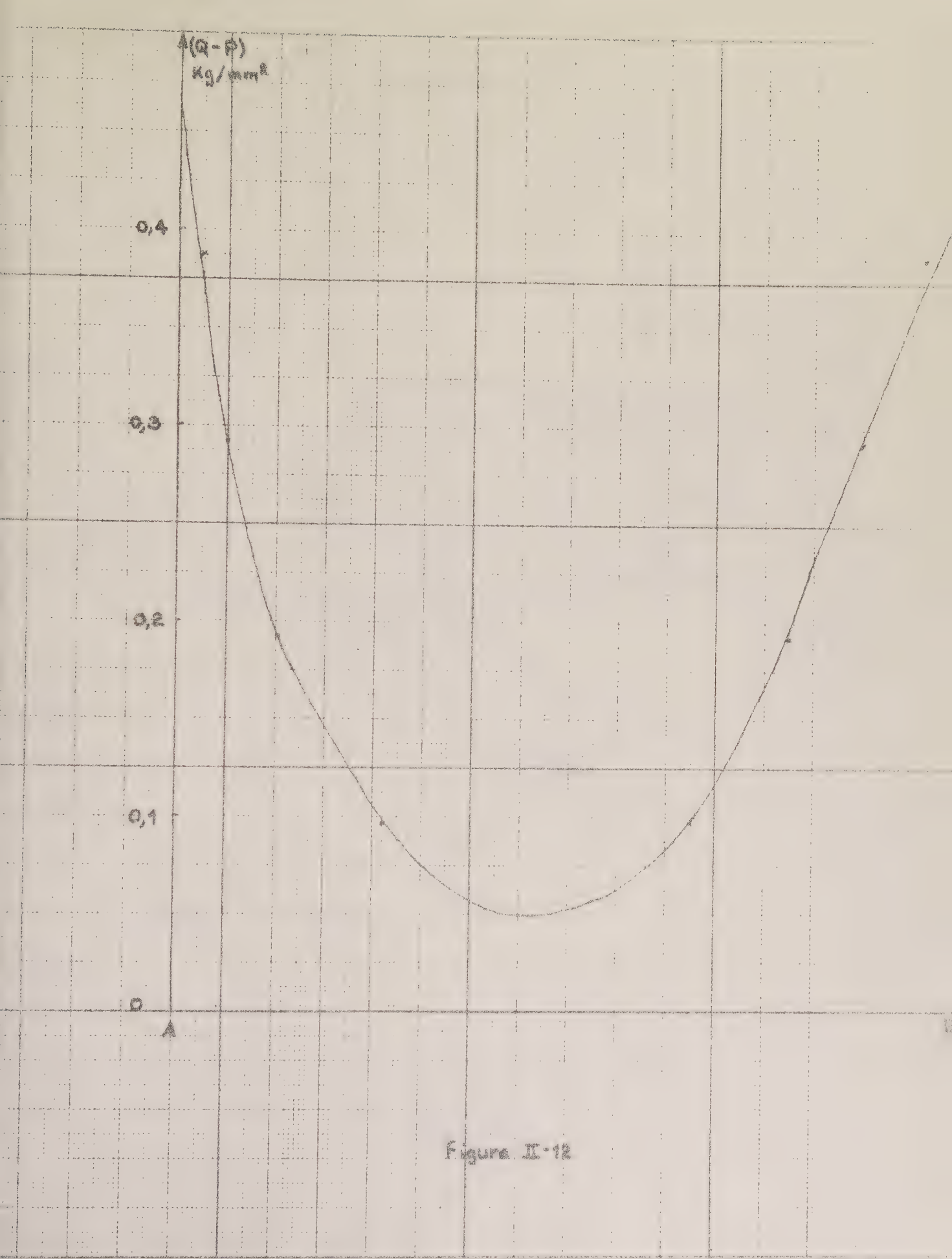


Figure II-12

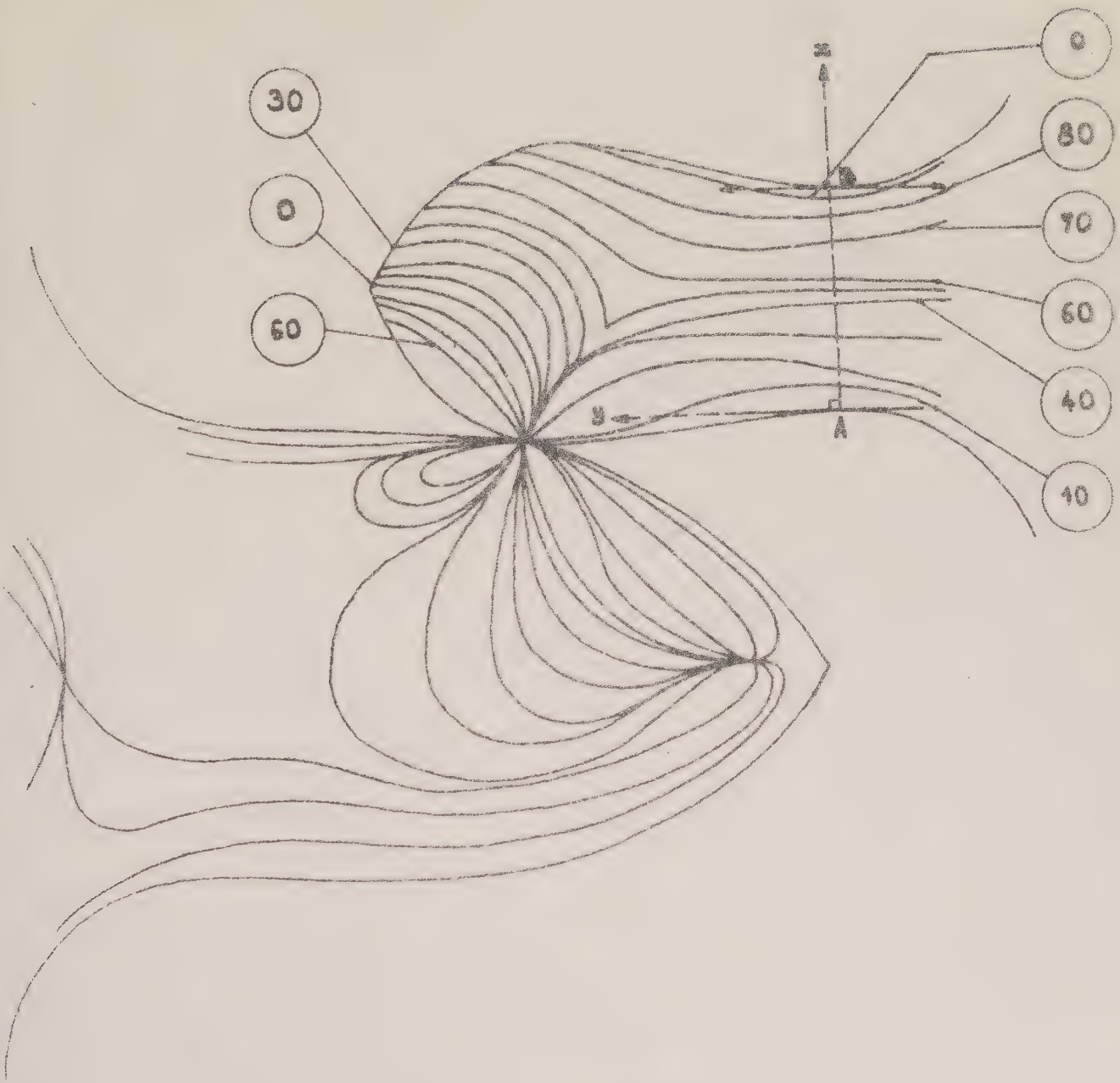


Figure II-13

.Isostatiques-

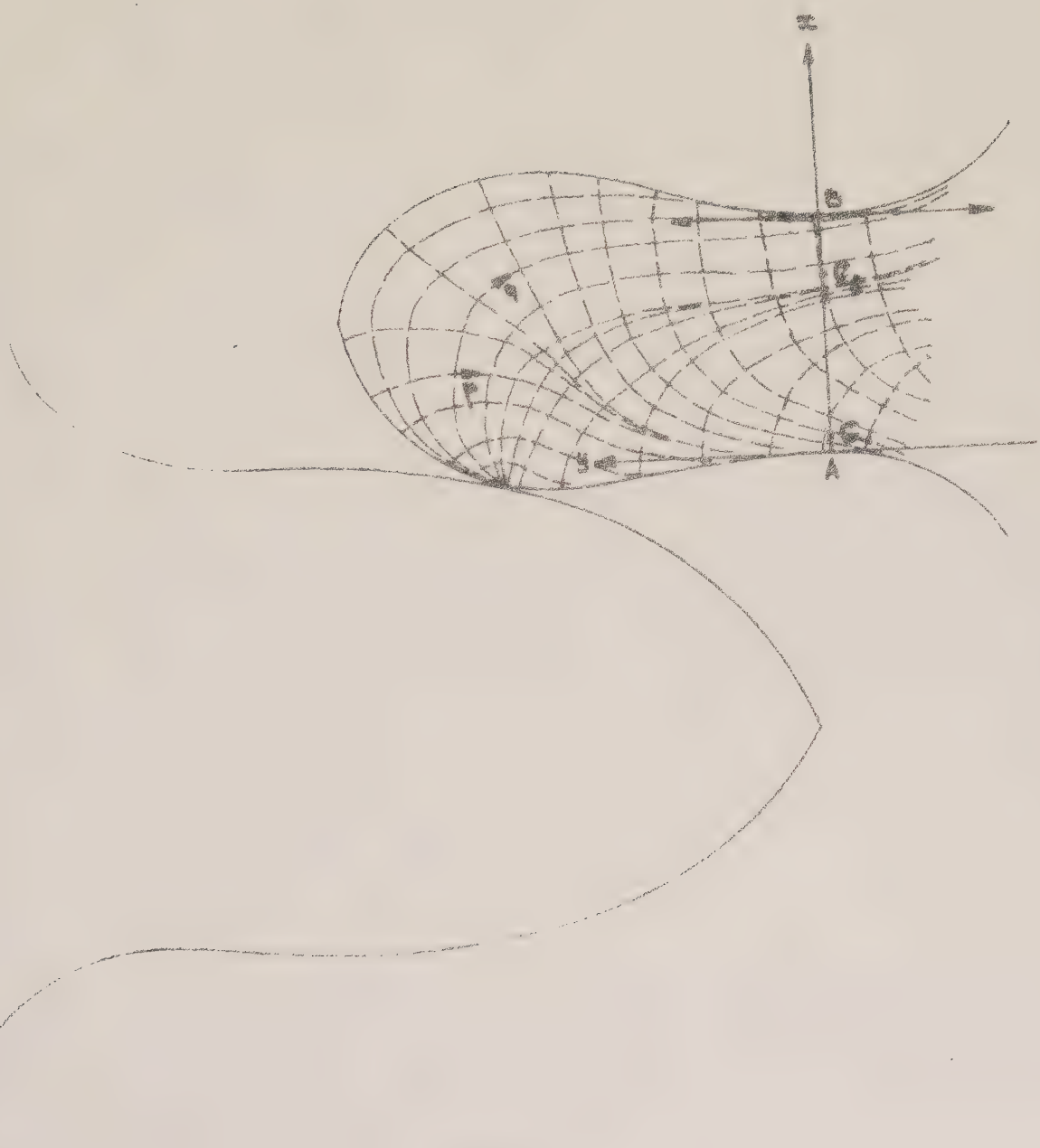


Figure II-14

détermination des contraintes principales dans la section AB sont alors connus. Mais on sait qu'en un point quelconque du contour libre de la plaque, c'est-à-dire en un point où aucune force extérieure n'est appliquée, les directions des contraintes principales doivent être parallèles et normales à la tangente en ce point. La contrainte normale au contour doit être égale à zéro ; donc le graphique de la figure (II-12) donne directement les valeurs des contraintes tangentielles en A et B :

- en A Q = 0 P = - 0,47 kg/mm^2
- en B P = 0 Q = 0,41 kg/mm^2

où P et Q correspondent respectivement aux contraintes de traction et de compression.

En A, on a un effort de traction alors qu'en B on a un effort de compression. Les matériaux travaillant mieux à la compression qu'à la traction, c'est en A que se manifestera la rupture. Connaissant la contrainte tangentielle n enA, on peut calculer la déformation. En effet, si $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ est l'allongement en ce point, la loi de **Hooke** permet d'écrire en première approximation :

$$n_{kg/mm^2} = E_{kg/mm^2} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \qquad (II-5)$$

Soit numériquement, avec n = 0,47 kg/mm^2 et E = 332 kg/mm^2.

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{0,47}{332} = 1,41 \cdot 10^{-3}$$

ceci pour une charge de 10,3 kg sur la roue.

Maintenant, il est possible de déterminer les contraintes principales tout le long de la droite AB dans la section de la dent en intégrant le long des isostatiques. Pour obtenir les contraintes séparées, il suffit d'en calculer une seule le long de AB, la seconde en découlera immédiatement puisque la différence (P - Q) est

connue. On intègre le long des isostatiques p à partir du bord libre jusqu'à leur intersection avec AB en utilisant les équations de Lamé-Maxwell ([4] chapître VI), d'où différentes valeurs de P sur AB. Remarquons encore que sur AB apparaissent deux points "cubiques" C_1 et C_2. La courbe de la figure (II-15) et celle de la figure (II-12) permettent de déterminer les variations deQ suivant AB.

Etude de la contrainte de cisaillement transversale :

Il est intéressant de déterminer comment la distribution de la contrainte de cisaillement transversale varie dans la section AB de la dent du pignon. La contrainte de cisaillement dans une direction faisant un angle β avec un des axes de contraintes principales est donnée par :

$$S = \frac{1}{2} (Q - P) \sin 2\beta \qquad (II - 6)$$

La contrainte de cisaillement sur la section AB au point où elle rencontre l'isocline de paramètre ϕ sera :

$$\frac{1}{2} (Q - P) \sin 2\phi$$

où ϕ est mesuré à partir de Ax (figure II-13).
Le graphique II-12 donne les valeurs de (Q - P) aux points où les isoclines coupent AB, ainsi il est possible de calculer la contrainte de cisaillement en ces différents points (figure II-16).

Pour connaître le comportement des dents en contact pendant une menée complète, il faut répéter cette étude pour un nombre suffisant de positions successives. Ce travail est très long, cependant il a le mérite de donner beaucoup de renseignements quant à la façon dont travaillent les dents et se répartissent les contraintes à l'intérieur de celles-ci.

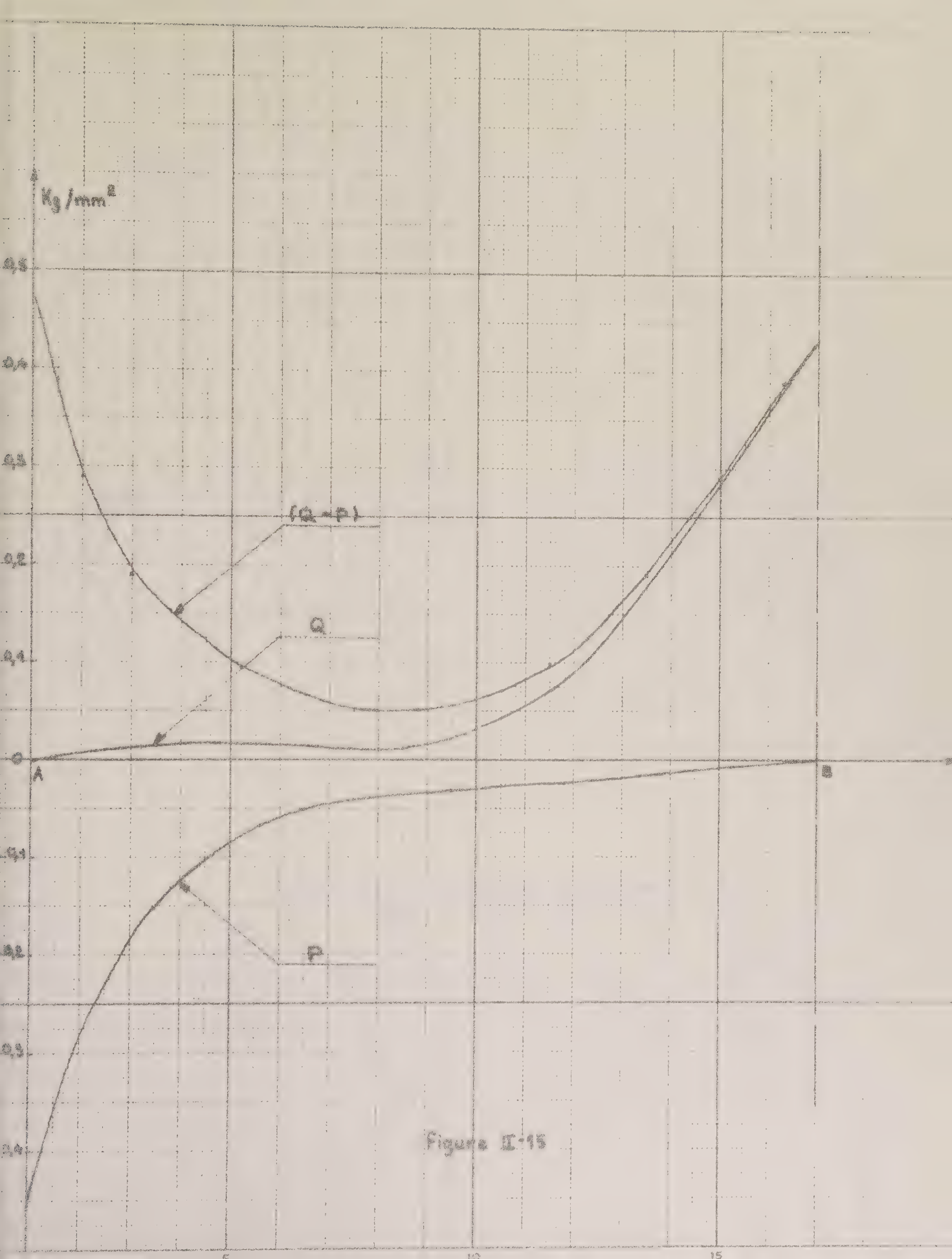
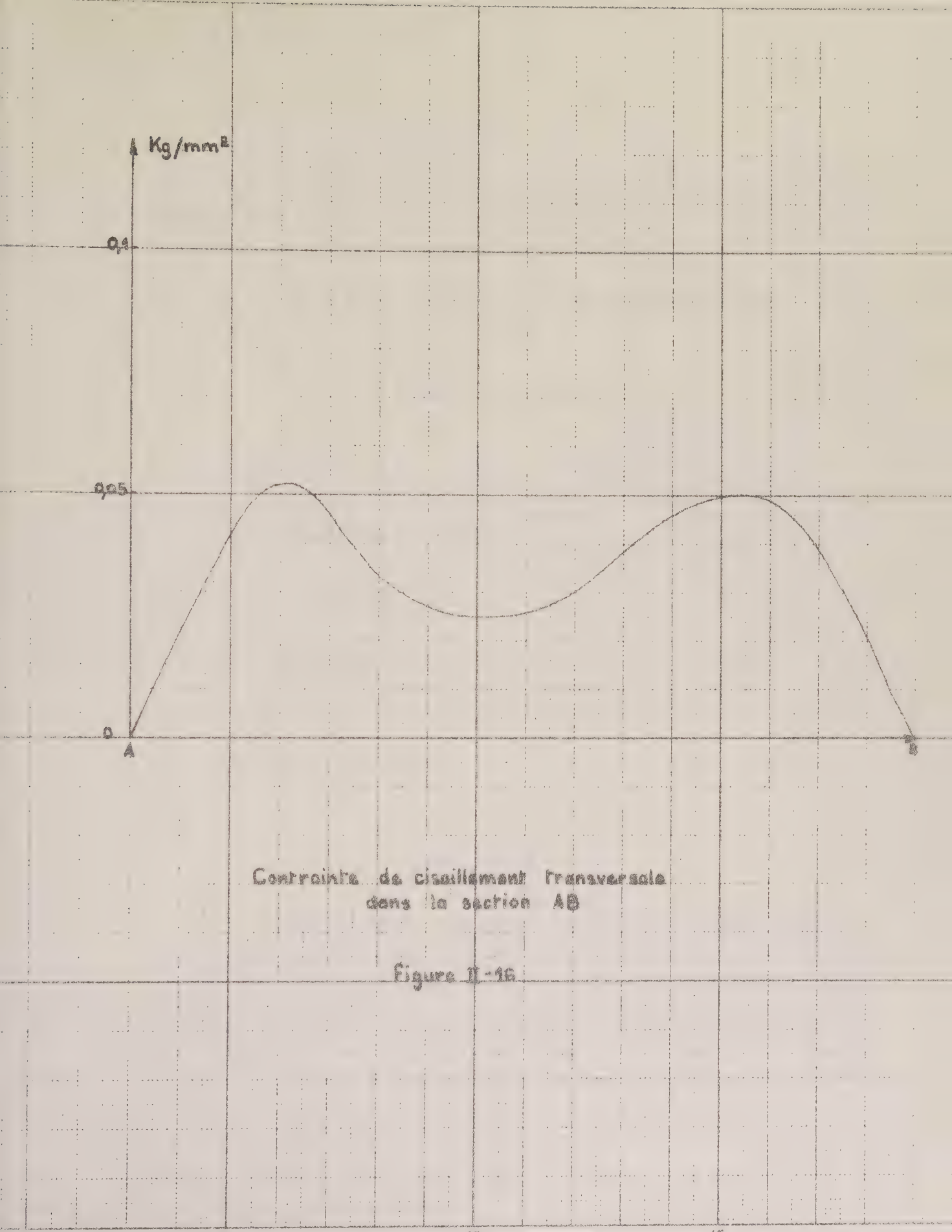


Figure II-15



Contrainte de cisaillement transversale
dans la section AB

Figure II-16

Pour avoir une idée plus précise des variations de l'amplitude des déformations au cours d'une menée complète, on a étudié les déformations de l'aile du pignon par extensométrie.

2-23 - Etude de la flexion par extensométrie.

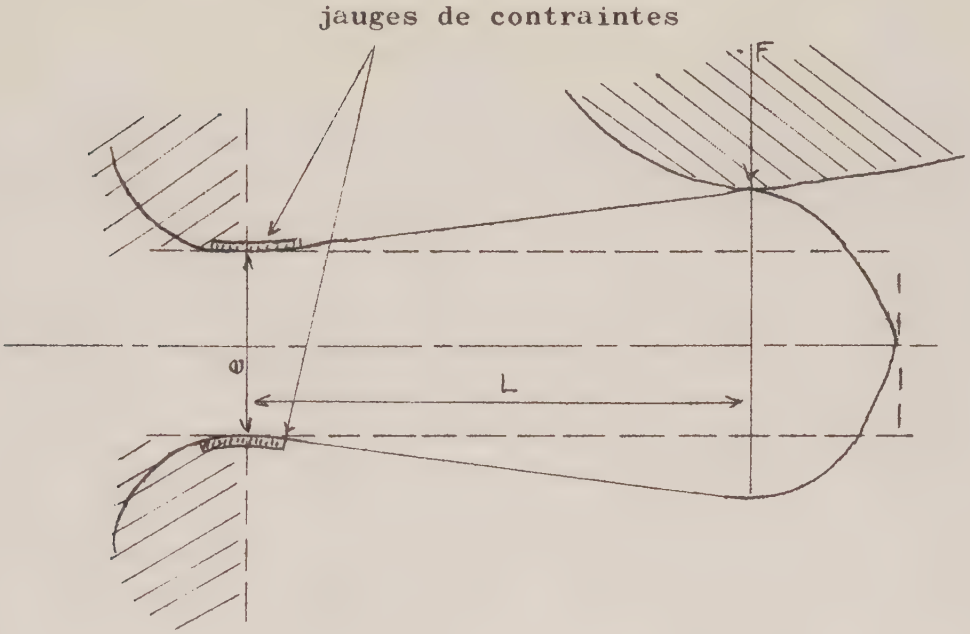


figure II-18

Comme le montre la figure (II-18), deux jauges sont collées de part et d'autre d'une aile du pignon à l'endroit où celle-ci est la plus étroite. Il est ainsi possible de suivre au cours d'une menée complète le comportement de la dent en flexion. Pour cette étude, on assimile la dent à une poutre encastrée à une extrémité et chargée à l'autre. Dans ce cas particulier, les formules

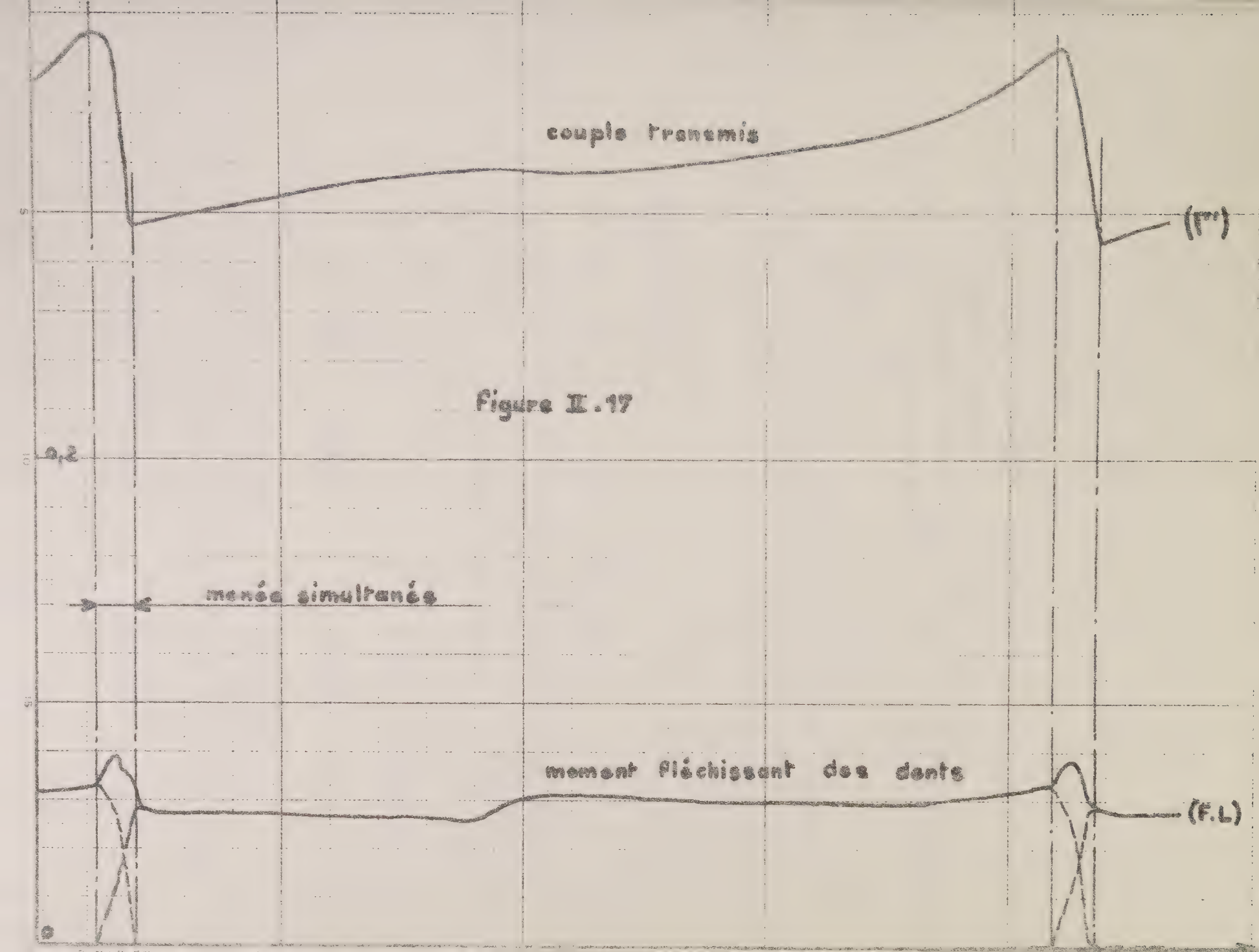

couple transmis
(Γ')
0,2
menée simultanée
moment fléchissant des dents
(F.L)

Figure II.17

de la flexion plane sont :

- flèche : $y = \frac{F\ L^3}{3\ EI}$ (II-7)

- moment fléchissant : $\mathcal{M}_f = F.L$ (II-8)

- contrainte maximum ($n_{max.}$), c'est-à-dire la contrainte à l'encastrement (endroit où sont collées les jauges),

$$n_{max.} = \frac{\mathcal{M}_f}{I} \cdot \frac{e}{2} \qquad \text{(II-9)}$$

En restant toujours très en dessous de la limite élastique $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ est donné directement par un pont d'extensométrie et enregistré sur un suiveur de spot pendant le fonctionnement de l'engrenage.

Avec les relations (II-8), (II-9) et (II-5), on détermine le moment fléchissant soit :

$$\mathcal{M}_f = F.L = \frac{2\ EI}{e} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{E.e^2.h}{6} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \qquad \text{(II-11)}$$

La déformation exprimée par $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ est directement proportionnelle à $\mathcal{M}_f$. La constante de proportionnalité est facile à calculer, en effet ici E = 332 kg/mm^2 ; e = 14 mm ; h = 10 mm, d'où :

$$\mathcal{M}_f = 108{,}5 \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \text{ m. kg} \qquad \text{(II-12)}$$

En première approximation, la valeur de l'énergie de déformation vaut, dans le cas envisagé :

$$W = \frac{\mathcal{M}_f^2.L}{2\ EI} = \frac{F^2.L^3}{2\ EI} \qquad \text{(II-13)}$$

ou encore

$$W = \frac{E.h.e}{6} \cdot L \cdot \left(\frac{\Delta \ell}{\ell}\right)^2 \qquad \text{(II-14)}$$

Si la valeur moyenne de L est égale à 20 mm, la relation (II-14) donne :

$$W = 155{,}4 \left(\frac{\Delta \ell}{\ell}\right)^2 \text{ m.kg} \qquad \text{(II-15)}$$

Les relations (11-12) et (11-15) et le relevé expérimental de $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ pendant une menée complète conduisent aux courbes représentées par les figures (11-17) et (11-19). Ces graphiques font apparaître que :

- le moment fléchissant $\mathcal{M}_f$ est plus important pendant la conduite après la ligne des centres que pendant la conduite avant la ligne des centres.

- $\mathcal{M}_f$ est pratiquement constant avant et après la ligne des centres. Ces deux faits ont déjà été observés lors de l'étude photoélastique qui précède (figures (II-6) à (II-11)).

- La somme des moments fléchissants des deux dents en contact augmente légèrement pendant la menée simultanée ; mais cette augmentation ne correspond pas exactement à la chute de Γ' pendans cette même période. En effet pendant que Γ' décroit, la somme des moments fléchissants augmente d'abord, puis diminue ensuite.

- l'énergie de déformation a une valeur très faible vis à vis de celle du couple transmis puisque $\frac{\Delta W}{\Delta \Gamma'} \neq 0{,}05$ %. De plus, les lois de similitude permettent de calculer le rapport de l'énergie de déformation (W) à l'énergie (W') nécessaire à l'entretien du balancier pour chaque alternance ($\frac{W'}{W} \simeq 10$).

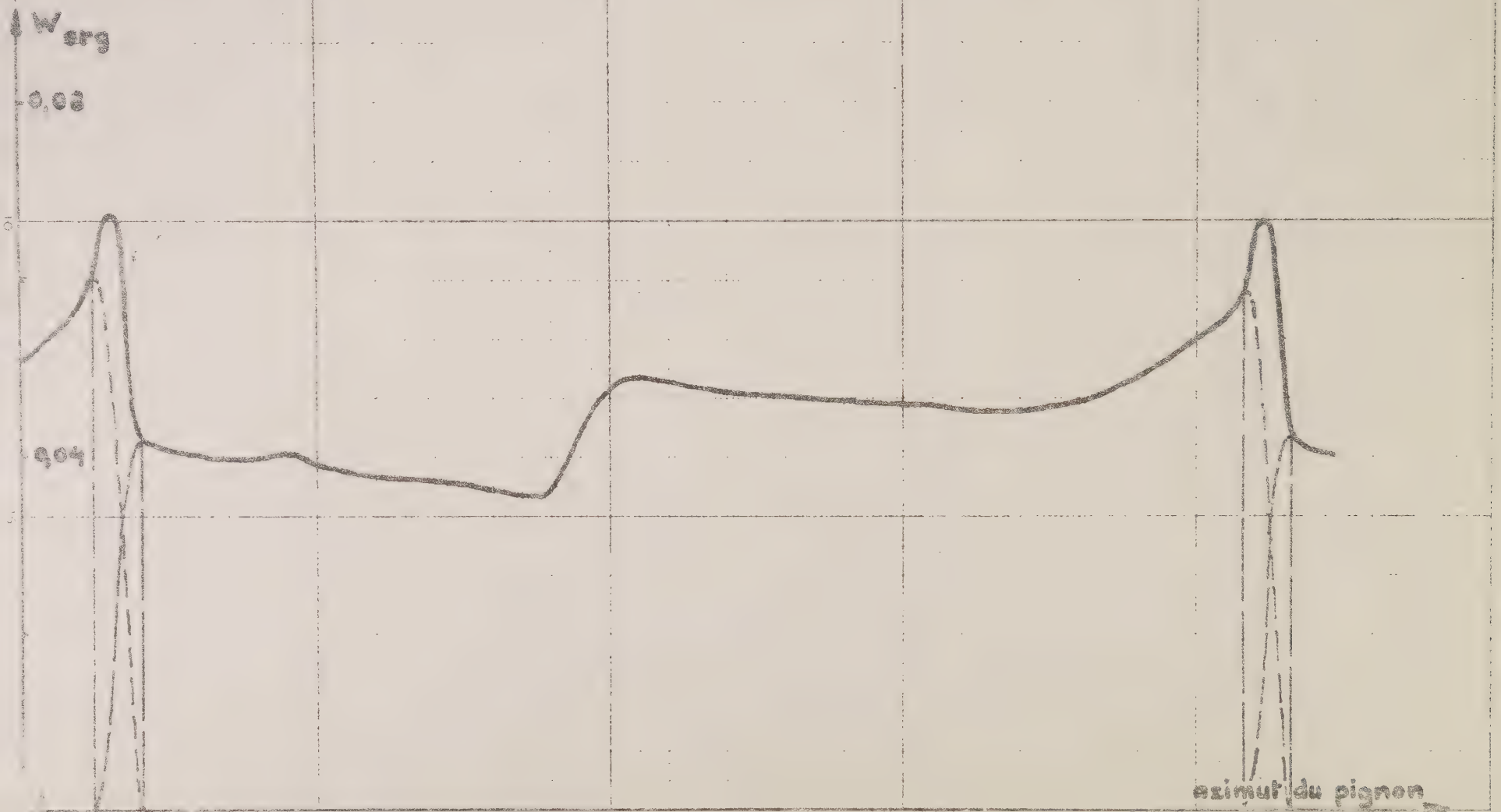
2-24 - Conclusions.

Les études des déformations par photoélasticimétrie et par extensométrie donnent des conclusions semblables et très intéressantes, énumérées ci-après :

- les variations de couple enregistrées sur l'axe du pignon et les déformations enregistrées sur les dents des mobiles ne sont pas simultanées.

- quantitativement, les variations de l'énergie de déformation sont très inférieures à celles du couple Γ', (elles sont dans le rapport 5.10^{-4}).

Figure X-13



L'influence des variations d'énergie élastique sur les fluctuations du couple transmis est négligeable, et il faut chercher ailleurs la raison de la discontinuité enregistrée dans la transmission du couple.

-=-=-=-=-=-=-

NOTATIONS EMPLOYEES DANS LE CHAPITRE II.

f : coefficient de frottement.

v : vitesse de glissement.

φ : angle de frottement.

Γ : couple appliqué à la roue.

Γ' : couple recueilli sur l'axe du pignon.

k : $k = \Gamma'/\Gamma$

R : distance du centre instantané de rotation (c. i. r) au centre de la roue.

R' : distance du c. i. r. au centre du pignon.

p : distance du c. i. r. au point de contact.

α : angle aigu formé par la ligne des centres et la normale commune aux deux profils en contact.

Q : contrainte principale moyenne correspondant à la compression

P : contrainte principale moyenne correspondant à la traction.

n : contrainte tangentielle.

E : Module d'Young.

$\frac{\Delta l}{l}$: allongement relatif caractérisant la déformation.

β : angle de la direction de la contrainte de cisaillement avec les axes des contraintes principales.

S : contrainte de cisaillement.

$\emptyset$: paramètre des isoclines.

F : effort normal à l'aile du pignon.

e : largeur minimum d'une aile de pignon.

h : épaisseur de la maquette.

I : moment d'inertie de la section minimum de l'aile du pignon.

L : distance entre la section minimum de l'aile du pignon et le point d'application de F.

y : flèche de la dent sous l'effort F.

$\mathfrak{M}_f$: moment fléchissant.

W : énergie de déformation.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II.

[1] G. HENRIOT : "Influence du lubrifiant sur le coefficient de frottement", S.E.I.E., n° 49, juin 1966, p. 28.

[2] R. CAZAUD : "Le frottement et l'usure des métaux. Les antifrictions". Dunod, Paris, 1955, Chapître I.

[3] Journal Suisse d'Horlogerie et de Bijouterie, novembre 1922.

[4] JESSOP-HARRIS : "Photoélasticité. Principes et Méthodes". Dunod, Paris, 1952.

[5] R. CHALEAT : Cours de Mécanique Appliquée professé à la Faculté des Sciences et à l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micromécanique de Besançon : "Rotations d'axes parallèles. Théorie des cames".

[6] J.A. MISHARIN : "Conférence internationale de Londres". Septembre 1958.

[7] BENEDICT-KELLEY : "American Society of Lubrication Engineers". Preprint, n° 60, LC2 17, 18, 19, octobre 1960.

[8] L. DEFOSSEZ : "Théorie générale de l'Horlogerie t. I et II.

[9] JACQUEROD-DEFOSSEZ : "Frottement dans les engrenages et étude des profils". Journal suisse d'Horlogerie et de Bijouterie, février 1927, n° 2, p. 25-28.

[10] R. LAVEST : "Le rendement dans les engrenages. Un moyen de comparaison". Journal Suisse d'Horlogerie et de Bijouterie, septembre 1932, n° 9, p. 197-200, octobre 1932, n° 10, p. 219-221.

[11] BAINVILLE-CAILHOL : déjà cité au chapître I.

[12] U. ZELNSTEIN : déjà cité au chapître I. "Mesure des contraintes", p. 174-183.

CHAPITRE III

INFLUENCE DE L'ENTRAXE ET DE LA FORME DES DENTS SUR LA TRANSMISSION DE L'ENERGIE.

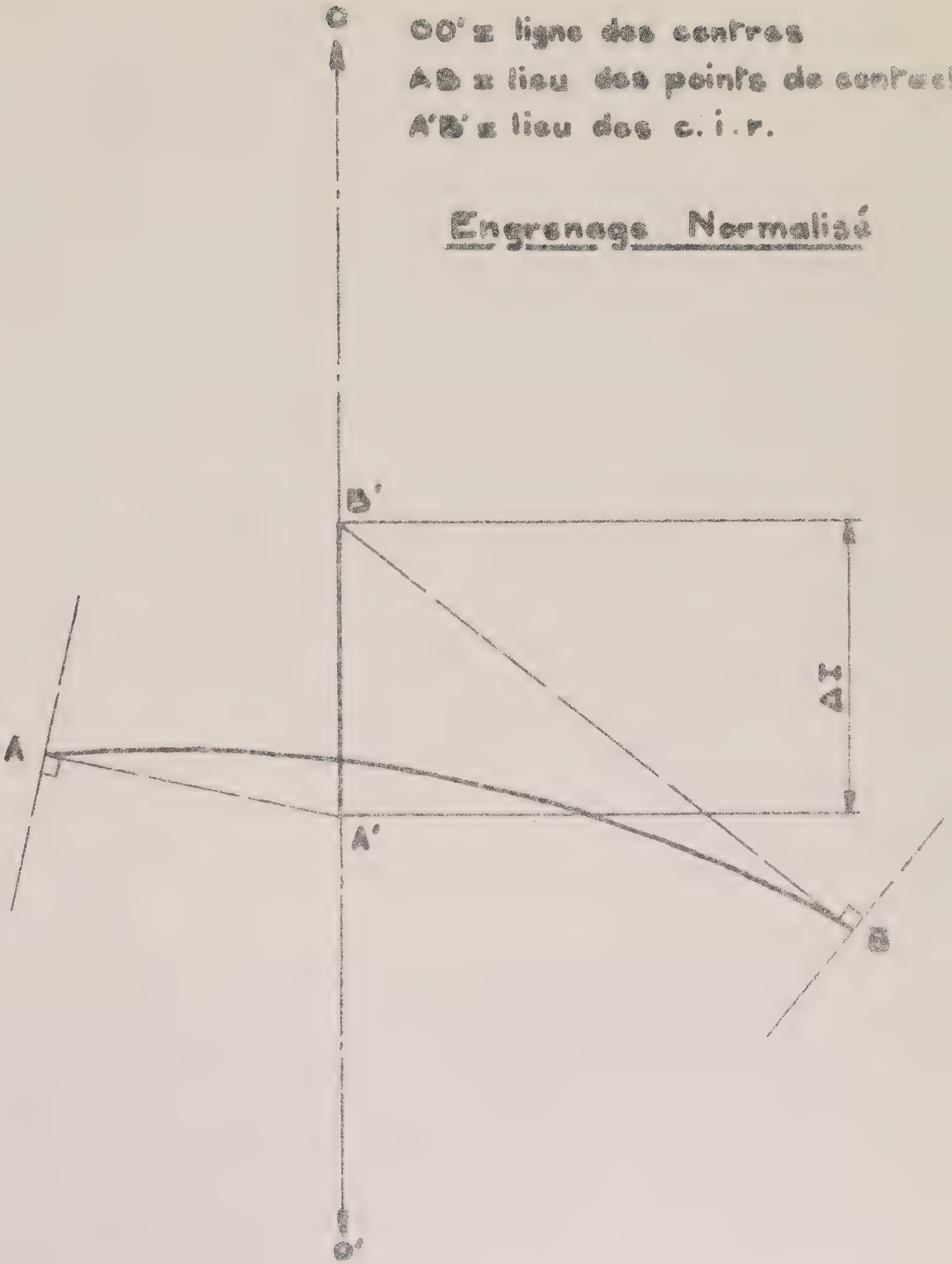
Dans le premier chapître, on a fait apparaître une discontinuité dans la transmission du couple de la roue au pignon, et dans le second chapître, on a démontré que cette discontinuité, relativement importante, n'avait pour origine ni les variations du coefficient de frottement, ni la flexion des dents. Etudions maintenant l'influence d'un défaut d'entraxe et l'influence de la forme propre des dents sur la transmission du couple. Toujours avec le montage présenté sur la figure (I-2), le couple transmis à l'axe du pignon a été enregistré pour différentes valeurs de l'entraxe et différents profils de denture.

Une première série de mesures, faites avec une roue de 70 dents et un pignon de 7 dents (réalisés au module 18 mm) a permis de mettre le défaut en évidence. En effet, la courbe III-1 qui représente les variations de couple en fonction de l'entraxe, pour des profils NHS (pignon B), montreque ces variations sont très importantes et minimales lorsque la valeur de l'entraxe est un peu supérieure à la valeur théorique. La figure (III-2) représente, pour cette valeur de l'entraxe, les points de contact successifs et les centres instantanés de rotation correspondants.

De ces relevés il résulte, comme la photographie I-4 le laissait prévoir :

a - que le centre instantané de rotation se déplace dans de grandes proportions sur la ligne des centres,

Figure II-2


OO' = ligne des centres
AB = lieu des points de contact
A'B' = lieu des c. i. r.
Engrenage Normalisé
O
A
B'
A
A'
B
O'

b - que la conduite a lieu davantage après la ligne des centres qu'avant,

c - que lelieu des points de contact ne coïncide pas avec les cercles générateurs.

Ce sont là tous les éléments qui définissent un engrenage défectueux, mais le défaut le plus grave est la variation du centre instantané de rotation sur la ligne des centres. Pour que la transmission du couple par les engrenages demeure constante, il faut que les surfaces frottantes des dentures soient formées par des courbes telles qu'à un instant quelconque, la normale commune au point de contact passe toujours par le même point de la ligne des centres [2] .

Ainsi plusieurs expériences ont été effectuées avec différents profils répondant plus ou moins à ce critère. Les mesures effectuées dans les mêmes conditions que précédemment ont donné les résultats représentés par la figure (III-3). Ce réseau de courbes parle de lui-même et on remarquera seulement que le changement de profil pour passer de la courbe I à la courbe II correspond à une augmentation du rayon de courbure du profil du pignon. De même, pour passer de la courbe I à la courbe III, nous avons augmenté simultanément les rayons de courbure des profils de la roue et du pignon, jusqu'à l'obtention des formes de dents représentées par la photographie III-4.

La figure (III-5) établit la comparaison entre les variations de couple provoquées, pendant une menée complète, d'une part par un couple d'engrenages NHS et d'autre part par un couple d'engrenages amélioré pour la valeur optimum de l'entraxe, c'est-à-dire, la valeur théorique. Pour le profil amélioré, il ne subsiste pra-

$\frac{\Delta i'}{i'}$

Influence de l'entraxe sur différents profils

X_0 = entraxe théorique

(I) profil NHS pignon B $Z = 70$ $Z' = 7$

(II) profil NHS pignon C " "

(III) profil amélioré

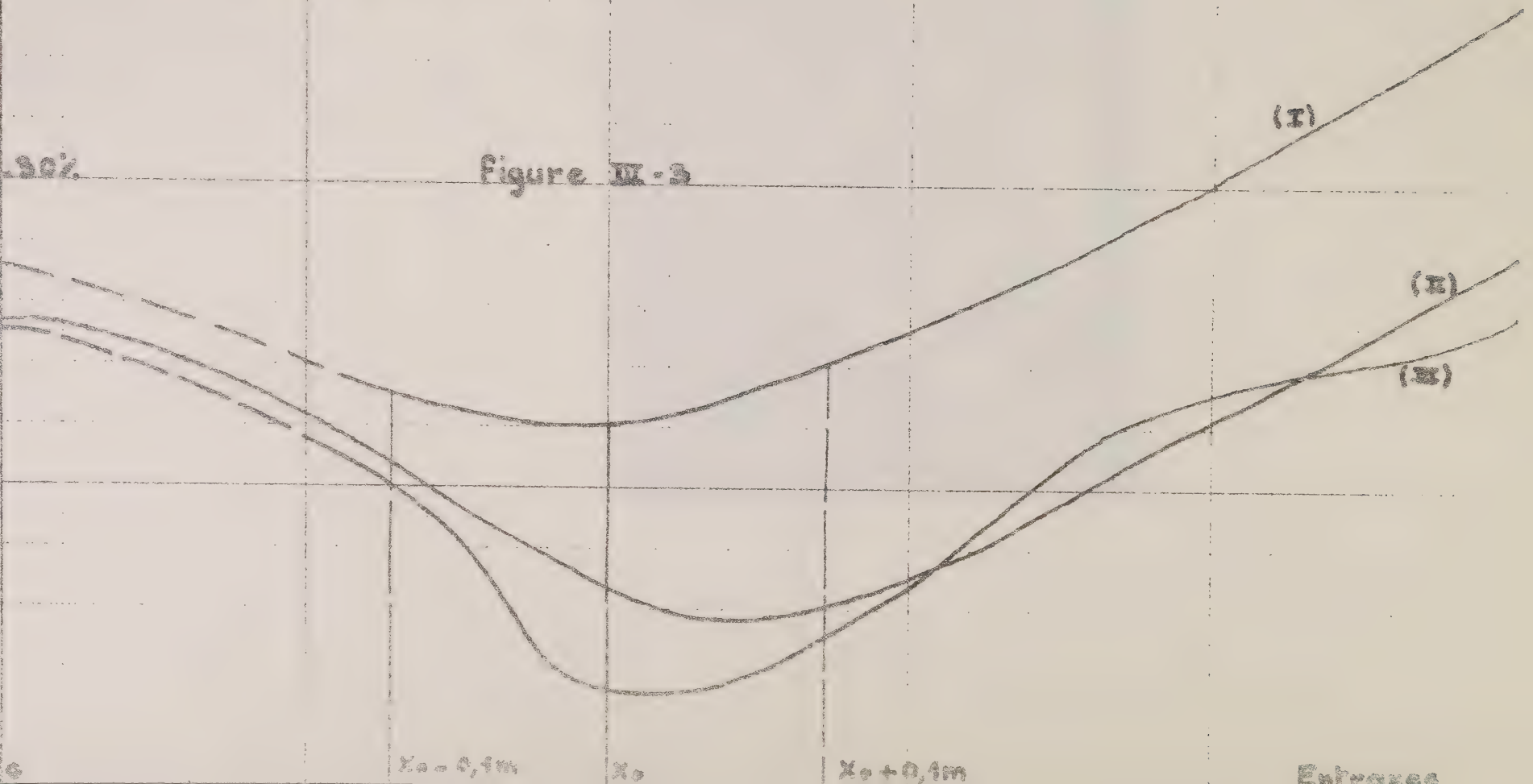


Figure III-3

Figure III - 4

Couple transmis par un engrenage normalisé
et un engrenage amélioré

(entraxe théorique X₀)

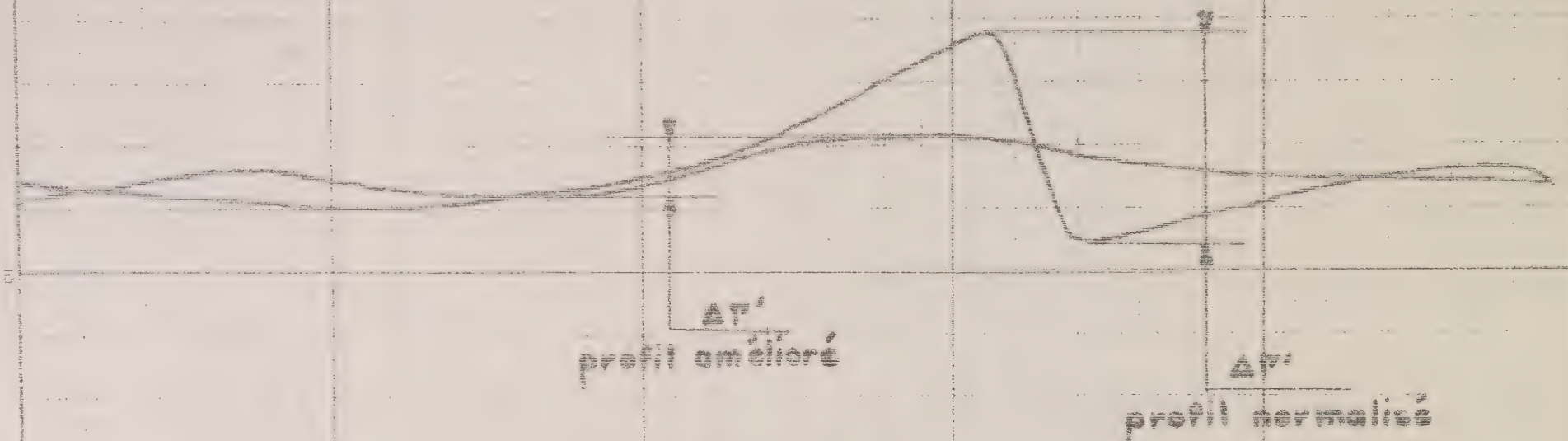


Figure III-5

azimut du pignon

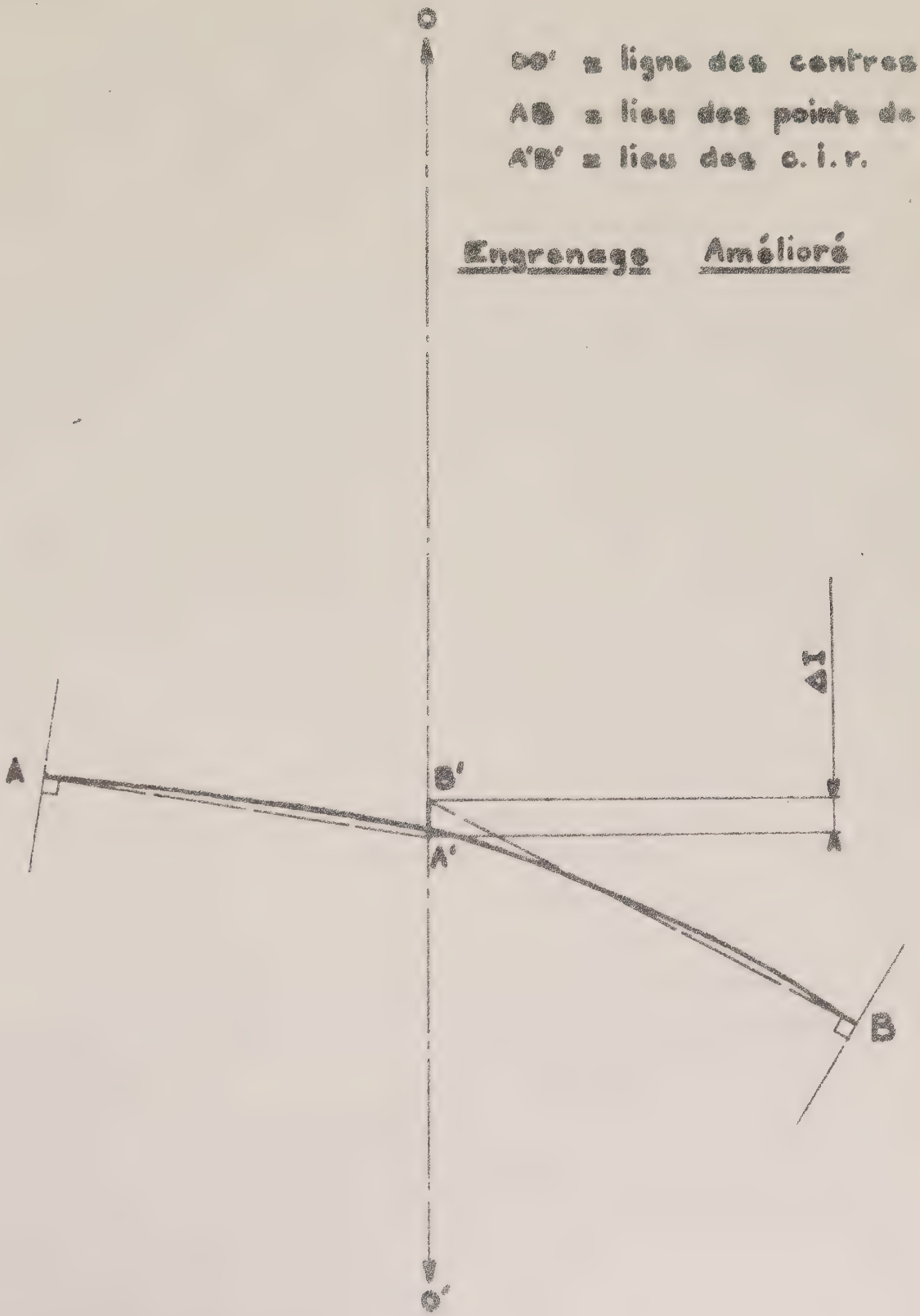
tiquement plus que les variations dûes au frottement et à la flexion des dents.

De la comparaison des figures (III-2) et (III-6) qui représentent la ligne d'action et l'intervalle de variation du centre instantané de rotation sur la ligne des centres respectivement pour les profils NHS et améliorés ; il résulte, dans le cas de la figure (III-6), que la conduite est partagée plus également de part et d'autre de la ligne des centres. C'est une amélioration notable. Il est en effet bien connu [1] d'une part que le glissement le plus considérable a lieu lorsque les contacts sont le plus éloignés de la ligne des centres et d'autre part qu'en ce qui concerne le rendement, il faut craindre plus les contacts éloignés que les contacts avant la ligne des centres. Le glissement diminue du premier contact avant la ligne des centres jusqu'au point central et il augmente ensuite jusqu'au dernier contact.

Enfin la comparaison des figures (III-2) et (III-6) donne un net avantage au profil amélioré quant au déplacement du centre instantané de rotation. Il n'y a plus de doute maintenant que la discontinuité de couple est pratiquement proportionnelle à l'amplitude du "bond" effectué par le c. i. r. sur la ligne des centres à l'instant précis du changement de dent. Donc la géométrie de l'engrenage, plus exactement, la géométrie de l'excédent des dents de l'engrenage, est directement mise en cause pour ce problème de la transmission régulière de l'énergie.

Ces premiers résultats conduisent à la remarque suivante : pour des engrenages multiplicateurs à grand rapport et pignon peu nombré, il est nécessaire d'avoir des rayons de courbure les plus grands possible pour les parties des profils extérieures au cercle primitif, autrement dit, on doit se rapprocher au maximum

Figure III - 6


OO' = ligne des centres
AB = lieu des points de contact
A'B' = lieu des c. i. r.
Engrenage Amélioré
O
A
A'
B'
B
O'

du profil théorique. Ceci peut paraître anormal à certains qui estiment que les formes théoriques des dents n'assurent pas une transmission régulière des forces puisqu'elles sont déterminées en négligeant le frottement et qu'en conséquence, la substitution aux courbes réelles d'arcs de cercle améliore l'engrenage. En fait, dans la plupart des cas, le défaut existant sur le profil s'ajoute à celui causé par le frottement et ne le compense nullement.

Cependant, certaines opérations, telles que le polissage, peuvent avoir des répercussions heureuses sur le fonctionnement de l'engrenage en diminuant le diamètre des mobiles mais surtout en augmentant le rayon de courbure du profil, ce qui confirme bien les conclusions précédentes [7] , [8] .

Remarquons encore que les extrémités des ailes du pignon (photographie III-4) ne sont jamais en contact avec les dents de la roue, En maintenant une certaine sécurité, il semble permis de tronquer cette extrémité. D'où les valeurs que nous recommandons pour des engrenages multiplicateurs avec pignons très peu nombré [4] :

a - Pour la roue :

$f_c = 0,92.f$ — f = facteur de saillie théorique. f_c = facteur de saillie corrigé.

$p = 1,5.f.m$ — p = rayon de courbure du profil. m = module de l'engrenage.

$D_t = m(z+2f_c)$ — D_t = diamètre de tête de la roue. z = nombre de dents de la roue.

Les autres caractéristiques, épaisseur des dents, diamètre à fond de dents, etc... restant les mêmes que celles recommandées par les normes NHS.

b - Pour le pignon :

$z' \leqslant 10$ — z' = nombre d'ailes du pignon.

$e' = \frac{1}{3}.p$; e' = épaisseur de l'aile (sur le cercle primitif). p = pas circonférenciel.

$p' = \frac{4}{3} .e' = 1,38.m$ p' = rayon de courbure du profil.

$2f'_c = 1,44.m$ f'_c = facteur de saillie corrigé du pignon.

$D'_t = m(z'+1,44)$ D'_t = diamètre de tête du pignon.

Ces modifications de profils donnent de bons résultats quant à la transmission du couple, mais malheureusement, elles entraînent des difficultés de réalisation que les fabricants d'ébauches connaissent très bien. En effet, l'examen de la courbe III de la figure (III-3) fait apparaître la nécessité d'avoir une valeur de l'entraxe bien déterminée pour que l'engrenage fonctionne dans de bonnes conditions. Ceci n'est pas toujours facile à obtenir dans la fabrication courante ou en série. De plus, un pignon ayant ce profil est beaucoup plus sensible aux défauts de taillage qu'un pignon dont l'excédent des ailes serait constitué de deux arcs de cercles. La figure (III-7) montre l'effet d'un mauvais centrage, de fraise sur un pignon de sept ailes, premièrement dans le cad du profil NHS et deuxièmement dans le cas du profil amélioré.

Conclusions.

Si cette série d'essais permit d'aboutir à une améliorations très sensible de la transmission de l'énergie au moyen d'engrenages, il faut déplorer le fait que ce gain a été acquis au détriment de la facilité d'exécution, en entraînant une diminution des tolérances d'entraxe et en nécessitant un centrage de fraise beaucoup plus précis.

De plus, ces profils entraînent un diamètre de noyau très faible pour le pignon. Il semble donc indispensable d'avoir un profil d'engrenage qui admette une grande souplesse d'exécution tout en donnant une transmission de couple convenable. L'engrenage en développante doit être utilisé chaque fois que cela est possible [6],

Figure III - 8

Engrenages en developpante

Engrenages Epicycloïdaux Elliptiques

mais hélas, on est limité quant au nombre de dents minimum pour le pignon. Ces considérations d'ordre général conduisent à l'étude des engrenages "hypo-épicycloïdaux elliptiques" et "épicycloïdaux elliptiques" [5] qui, en laboratoire, ont donné satisfaction.

-=-=-=-=-=-=-

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III.

[1] R. LAVEST : cité au chapître II.

[2] J et M. GROSSMANN : "Horlogerie Théorique", Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[4] A. MIGEON : "Perfectionnements aux engrenages épicycloïdaux". Communication présentée au Congrès d'Evian le 5 juin 1966. Annales Françaises de Chronométrie et de Micromécanique, 1966.

[5] R. CHALEAT et A. MIGEON : Brevet français n° 64005. "Perfectionnements aux engrenages".

[6] R. SONZOGNO : Déjà cité au chapitre I.

[7] P. LANGUE : "Mise au point des engrenages du calibre 10 $\frac{1}{2}$ 237E Dodane", note CETEHOR n° 745.

[8] F. ASSMUS : "Berechnung der Ubertragungseigenschaften bei fehlerhaften Uhrenverzahnungen", Congrès International de Lausanne, juin 1964.

CHAPITRE IV

PROFILS "ELLIPTIQUES".

4-1 - Définitions.

4-11 - Définition de l'"épicycloïde elliptique".

On appellera "épicycloïde elliptique" le lieu décrit par le point de tangence origine A du cercle (c) et de l'ellipse (E), quand celle-ci roule extérieurement sans glisser sur le cercle, le point A étant lié à l'ellipse (figure IV-1).

4-12 - Définition de l'hypocycloïde elliptique.

On appellera "hypocycloïde elliptique" le lieu décrit par le point de tangence origine A du cercle (c) et de l'ellipse (E) quand celle-ci roule intérieurement sans glisser sur le cercle, ce point A étant lié à l'ellipse (figure IV-2).

4-13 - Courbes secondaires.

On appellera "épicycloïde elliptique raccourcie ou allongée", "hypocycloïde elliptique raccourcie ou allongée", les courbes décrites respectivement par un point de la normale à l'origine, intérieur ou extérieur à l'ellipse lorsque celle-ci roule sans glisser, extérieurement ou intérieurement, sur le cercle.

Remarque : Pour les parties actives des profils, on utilisera seulement les deux premières de ces six courbes (courbes principales), et les autres courbes (courbes secondaires), serviront comme courbes de raccordement. On les assimilera presque toujours à des arcs de cercle puisque ces parties des profils n'interviennent pas dans la transmission de l'énergie.

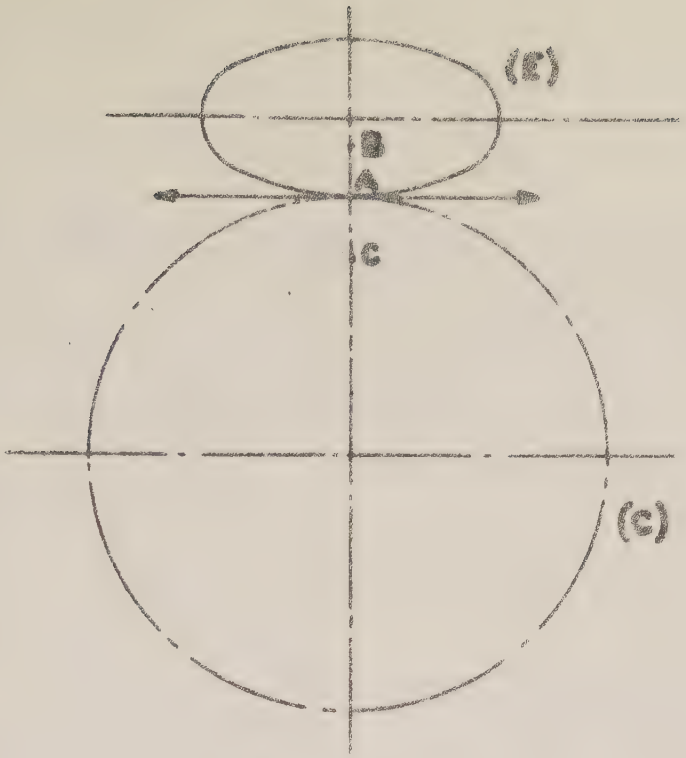


Figure III-1

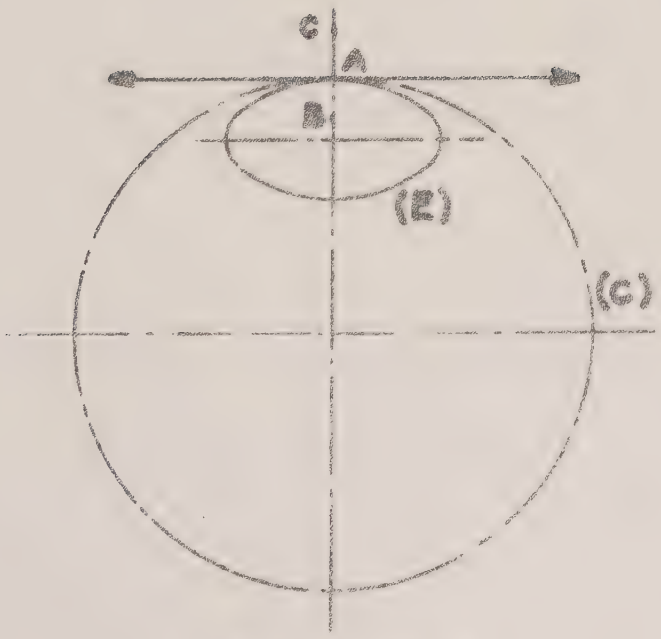


Figure III-2

4-2 - Equation de l'épicycloïde elliptique :

Considérons la figure (IV-3) dans laquelle (c) est un cercle fixe centre en C ; (G) est la courbe génératrice elliptique de centre O" qui roule sans glisser sur (c).

Le système d'axes Oxy est lié à (c) et le système O"XY est lié à (G).

(P) est le lieu de M' dans le plan de (c) obtenu en faisant rouler sans glisser (G) sur (c).

Coordonnées d'un point courant M' (x, y) de (P) :
Soient R le rayon de (c) ; a et b (a > b) les demi-axes de (G). Nous poserons : $p = |M''O''|$, $s = \overset{\frown}{M'M''}$, $\theta = \overset{\frown}{\vec{Ox}, \vec{OM''}}$, $\epsilon' = \overset{\frown}{\vec{Cx}, \vec{OM'}}$, $\beta = \overset{\frown}{\vec{M''T}, \vec{O''X}}$, $\alpha = \overset{\frown}{\vec{O''X}, \vec{M''O''}} - \pi$.

Les coordonnées de M' sont données par la relation vectorielle :

$$\vec{OM'} = \vec{OM''} + \vec{M''O''} + \vec{O''M'}$$

que l'on projette sur $\vec{Ox}$ et $\vec{Oy}$ pour avoir respectivement l'abscisse x et l'ordonnée y.

Les différents angles de projection valent : $(\vec{Ox}, \vec{O''X}) = \theta + \beta + \frac{\pi}{2}$; $(\vec{Ox}, \vec{O''Y}) = \theta + \beta + \pi$; $(\vec{Oy} + \vec{O''X}) = \theta + \beta$; $(\vec{Oy}, \vec{O''Y}) = \theta + \beta + \frac{\pi}{2}$.

Dans le système d'axes Oxy, les composantes de $\vec{OM''}$ sont : R cos θ et R sin θ. Celles de $\vec{M''O''}$ sont : p sin (α + θ + β) et - p cos (α + θ + β). Celles de $\vec{O''M''}$ sont : - b cos (θ + β) et - b sin (θ + β) : d'où les coordonnées x et y de M' :

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta + p \sin (\alpha + \epsilon + \beta) - b \cos (\theta + \beta) \\ y &= R \sin \theta - p \cos (\alpha + \theta + \beta) - b \sin (\theta + \beta) \end{aligned} \qquad \text{(IV-1)}$$

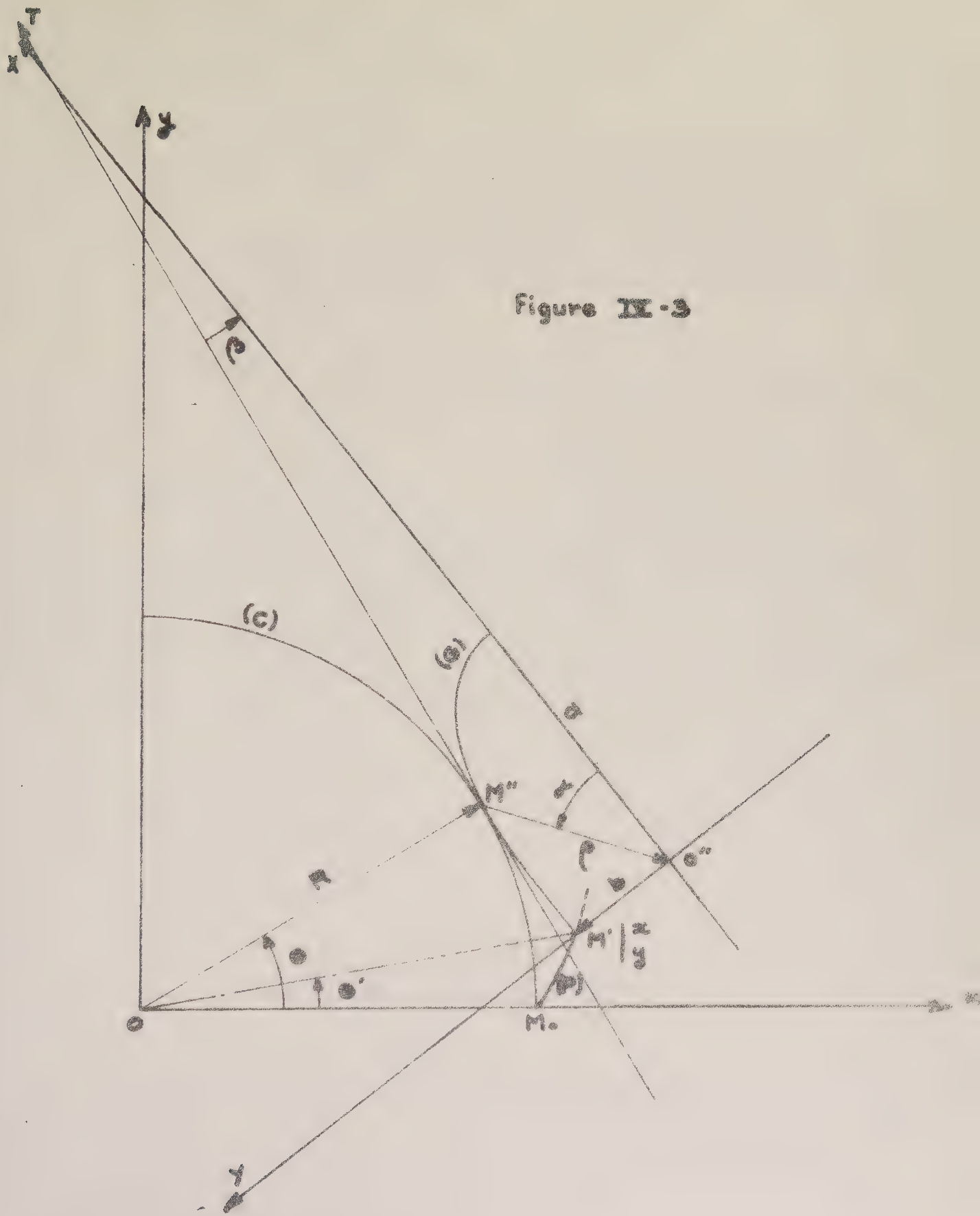


Figure IX-3

Pour pouvoir calculer complètement x et y, il faut déterminer les relations qui donnent les différents paramètres à savoir α , β , θ et p, en fonction des éléments connus R, a et b. Dans la formule (IV-1), on exprimera les seconds membres en fonction d'un seul paramètre α qu'il suffira de faire varier pour déterminer la courbe (p).

Calcul de $\rho = f(\alpha)$.

Par rapport aux axes O"XY l'équation de l'ellipse est :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

avec $X = \rho \cos\alpha \qquad Y = \rho \sin\alpha$

d'où
$$\boxed{\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2\alpha + a^2 \sin^2\alpha}} = f(\alpha)} \qquad \text{(IV-2)}$$

Calcul de $\theta = g(\alpha)$.

L'ellipse (G) roule sans glisser sur le cercle (c) donc $\overset{\frown}{MoM''} = \overset{\frown}{M'M''}$ ce qui se traduis par

$$\boxed{R\theta = s} \qquad \text{(IV-3)}$$

Calcul de s.

On a : $b^2 XdX + a^2 YdY = 0$

$dX^2 + dY^2 = ds^2$

d'où l'on déduit :

$$ds = \frac{\sqrt{1 + (\frac{b^2}{a^4} - \frac{1}{a^2})\, X^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2} X^2}}\, dX$$

Posons $x = \frac{X}{a}$, si k est l'excentricité de l'ellipse, $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$.

L'expression de ds devient alors :

$$ds = a \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Posons encore $x = \sin \phi = \frac{X}{a}$

$k = \sin \gamma$ (IV-4)

d'où $ds = a \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 \phi} \; d\phi$

Pour avoir la valeur de s, il suffit d'intégrer cette expression entre O et ϕ soit :

$$s = a \int_0^{\phi} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 \phi} \; d\phi \qquad \text{(IV-5)}$$

s est alors donné par une intégrale elliptique de seconde espèce dont la solution est connue et donnée par des tables numériques.

Calcul de $\beta = h(\alpha)$.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M''H}{HN} = \frac{Y}{O''N - X} \qquad \text{(figure IV-4)}$$

$$\cos \varepsilon = \frac{X}{a} = \frac{a}{O'' N} \qquad \text{d'où} \qquad O''N = \frac{a^2}{X}$$

donc $$\operatorname{tg} \beta = \frac{XY}{a^2 - X^2}$$

En fonction de α on obtient aisément :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{cotg} \alpha \qquad \text{(IV-6)}$$

Les formules (IV-1), (IV-2), (IV-3), (IV-4), (IV-5) et (IV-6) permettent de calculer les coordonnées d'un point de (P) connaissant :

- l'excentricité k de l'ellipse, donc a et b,

- le rayon R de (c),
- l'angle α .

Les longueurs a, b et R sont des constantes, il suffit de faire varier le paramètre α pour avoir une série de points appartenant à (P).

4-3 - Exemple de détermination analytique d'un profil point par point.

On utilisera les relations trouvées dans le paragraphe précédent et on devra successivement :

1 - se donner une valeur de α ,
2 - calculer $\rho = f(\alpha)$ avec la relation (IV-2),
3 - Calculer $X = \rho \cos \alpha$,
4 - Calculer ϕ et γ avec les relations (IV-4),
5 - Calculer s avec la relation (IV-5),
6 - Déterminer $\theta = g(\alpha)$ avec la formule (IV-3),
7 - Calculer β avec la formule (IV-6),
8 - Calculer les coordonnées x et y avec les relations (IV-1).

Application numérique :

Données : $Z = 48$ $\quad Z' = 6$ $\quad m = 16,5$ mm

$a = \frac{Z'.m}{5}$ $\quad b = \frac{Z'.m}{10} = \frac{9}{2}$ $\quad k = 0,8660$

1- Supposons $\alpha = 20°$ par exemple :

$\cos \alpha = 0,93969$; $\sin \alpha = 0,34202$; $\cotg \alpha = 2,74748$.

2- on a ρ :

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}} = 18,06 \text{ mm}$$

3- puis X :

$$X = \rho \cos \alpha = 16,970 \text{ mm}.$$

4 - En outre ϕ et γ :

$$x = \frac{X}{\ell} = \sin \phi \qquad ; \qquad k = \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = 0{,}8660 \quad \text{d'où} \quad \gamma = 60°.$$

$$\sin\phi = \frac{16{,}970}{21} = 0{,}80813 \qquad \phi = 53°55'$$

5 - pour $\phi = 53°55'$ et $\gamma = 60°$ les tables numériques donnent :

$$\int_0^{\phi} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \, . \, \sin^2 \phi} \; d\phi = 0{,}845$$

soit $s = 21.0{,}845$

$= 17{,}745$ mm.

6 - On en déduit θ :

$$R\theta = s \quad \text{donc} \quad \theta = 2°34'$$

7 - L'angle β est donné par :

$$\text{tg}\,\beta = \frac{1}{4} \, . \, 2{,}74248 = 0{,}68687$$

$\beta = 34°29'$

8 - Les coordonnées x et y d'unpoint du profil sont :

$R \cos \theta = + 396{,}600$	$R \sin \theta = 17{,}732$
$\rho \sin (\alpha + \beta + \theta) = + 15{,}155$	$-\rho \cos (\alpha + \beta + \theta) = - 9{,}823$
$- b \cos (\theta + \beta) = - 8{,}359$	$- b \sin (\theta + \beta) = -6{,}326$
$X = 402{,}396$ mm	$Y = 1{,}583$ mm

Ce calcul n'est pas très long si l'on fait usage d'une machine à calculer et il suffit de le répéter environ dix fois pour avoir le profil théorique correct d'un engrenage avec une précision satisfaisante.

4-4 - Construction géométrique.

Si l'on ne dispose pas de moyens de calcul rapides ou de moyens de pointage précis, on peut déterminer géométriquement

l'épicycloïde elliptique. Considérons la figure (IV-5) dans laquelle (G) est l'ellipse génératrice qui roule sans glisser sur le cercle fixe (c), et cherchons le lieu des points P_i liés à (G), quand (G) roule sur (c).

Pour construire ce lieu, on utilise deux propriétés fondamentales du mouvement plan sur plan :

- (G) roule sans glisser sur (c) donc $\overset{\frown}{P_o M_i} = \overset{\frown}{P_o M'_i}$,
- les deux courbes sont constamment tangentes.

On procède donc comme suit :

1) On divise les deux courbes en arcs respectivement égaux, c'est-à-dire :

$\overset{\frown}{P_o M_1} = \overset{\frown}{P_o M'_1}$

$\overset{\frown}{M_1 M_2} = \overset{\frown}{M'_1 M'_2}$ soit $\overset{\frown}{P_o M_2} = \overset{\frown}{P_o M'_2}$

.....

$\overset{\frown}{M_i M_{i+1}} = \overset{\frown}{M'_i M'_{i+1}}$

2) Pour obtenir le point P_i de (P), on trace la tangente à (c) en M_i soit $\overrightarrow{M_i T_i}$.

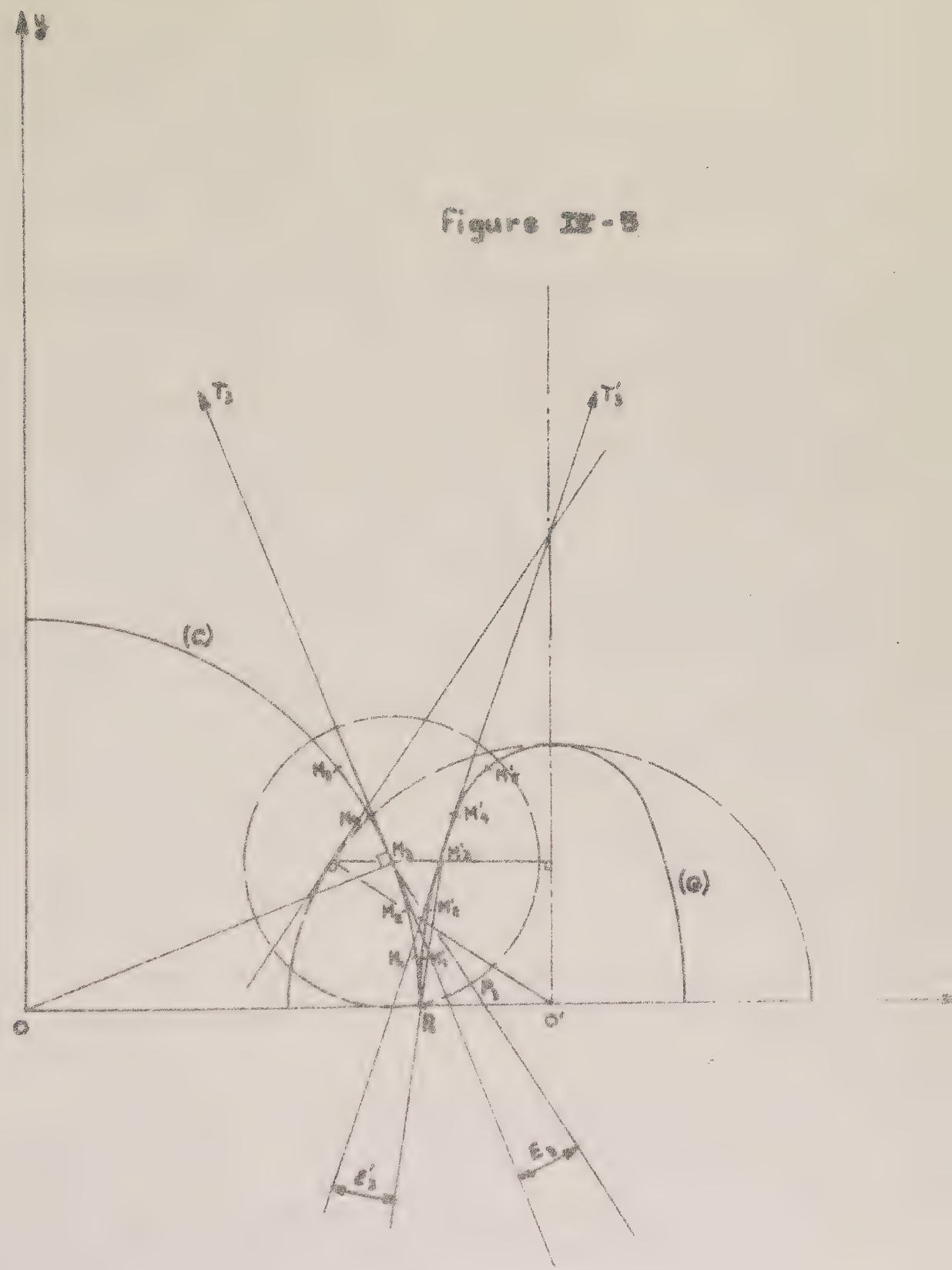
3) On trace la tangente à (G) en M'_i soit $\overrightarrow{M'_i T'_i}$.

4) On joint M'_i et P_o d'où la droite $M'_i P_o$ qui forme l'angle ε'_i avec la tangente $\overrightarrow{M'_i T'_i}$.

5) On trace un cercle de centre M_i et de rayon $r = |M'_i P_o|$

6) Dans le mouvement de roulement sans glissement, le point M'_i vient se confondre avec le point M_i, à ce moment, les deux tangentes sont confondues, donc $\overrightarrow{M_i T_i}$ confondu avec $\overrightarrow{M'_i T'_i}$. Pour avoir le point P_i appartenant à la courbe cherchée, il suffit

Figure IV-5



de reporter l'angle $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$. L'intersection de cette nouvelle droite avec le cercle de rayon r et de centre M_i donne P_i. La précision du tracé dépend évidemment du nombre de points déterminés et de la longueur des arcs $\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$ et $\overset{\frown}{M'_i M'_{i+1}}$.

4-5 - Définition de l'engrenage "Hypo-épicycloïdal elliptique".

Cet engrenage est caractérisé par le fait que l'odontoïde, c'est-à-dire la courbe qui détermine le profil des dents, est constituée par deux courbes distinctes ; une hypocycloïde elliptique pour la partie de la dent se trouvant à l'intérieur du cercle primitif (flanc de la dent) et une épicycloïde elliptique pour la partie extérieure (excédent de la dent) [2] .

4-51 - Détermination du profil.

Soient figure (IV-6), (c') le cercle primitif du pignon, (c) lecercle primitif de la roue,(E') et (E) les ellipses génératrices et AA' la ligne d'action.

Quand (E') roule sans glisser sur l'extérieur de (c), le point P lié à (E') engendre l'excédent des dents de la roue, soit une "épicycloïde elliptique".

Quand (E') roule sans glisser à l'intérieur de (c'), P engendre le flanc des ailes du pignon, soit une "hypocycloïde elliptique".

Quand (E) roule sans glisser à l'intérieur de (c,) P lié à (E) engendre le flanc des dents de la roue, soit une "hypocycloïde elliptique".

Quand (E) roule sans glisser sur l'extérieur de c', P engendre l'excédent des ailes du pignon soit "une épicycloïde elliptique".

Les fonds de dentssont des arcs de cercle dont la détermination des éléments sera exposée ultérieurement.

4-52 - Caractéristiques dimensionnelles :

m = module de l'engrenage,

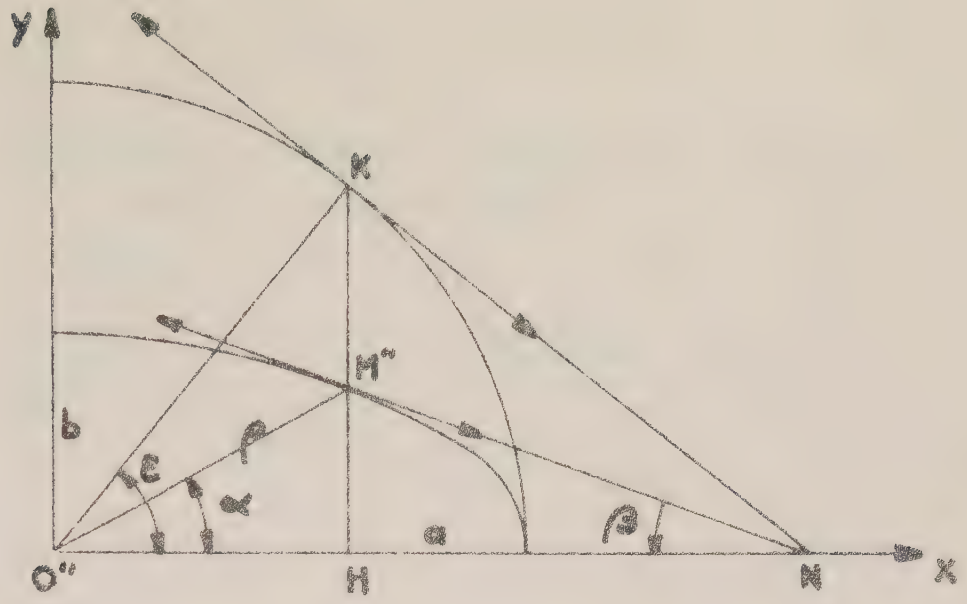


Figure IX-4

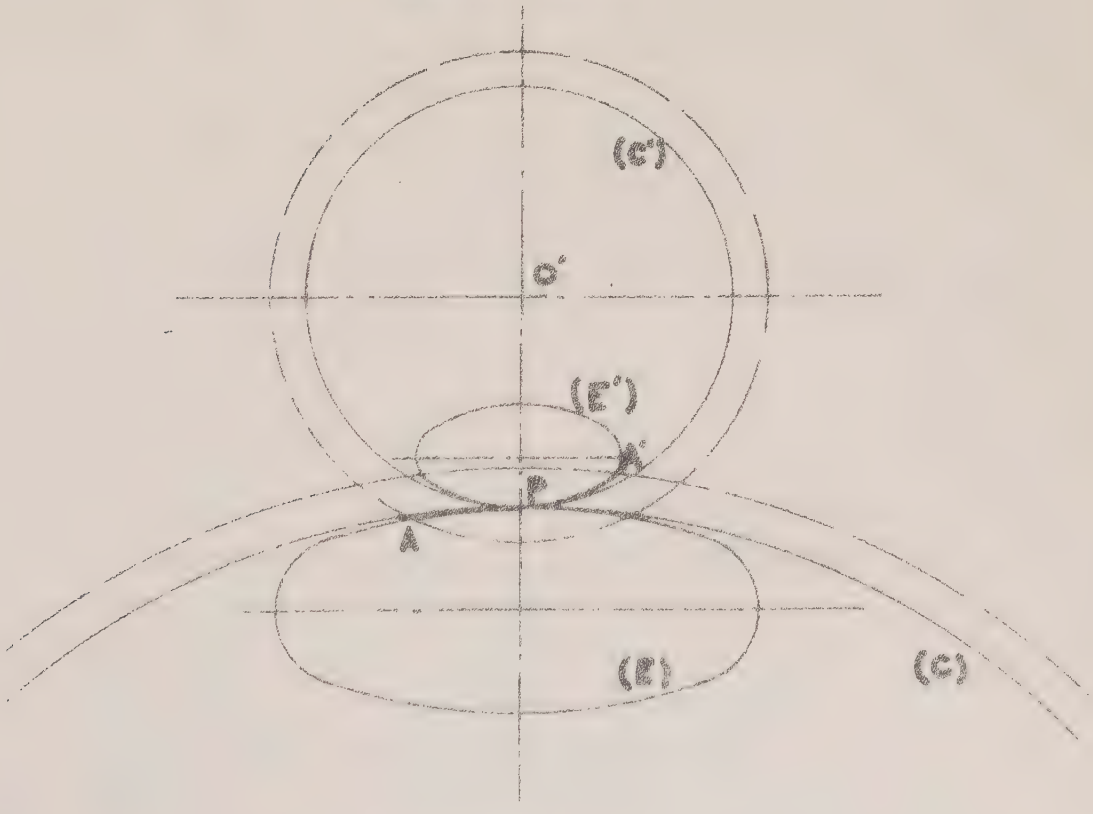


Figure IX-6

Z = nombre de dents de la roue,

Z' = nombre de dents du pignon.

a - Ellipses génératrices :

Excentricité k	demi-axes			
	a	b	a'	b'
0,8660	$\frac{Z.m}{5}$	$\frac{Z.m}{10}$	$\frac{Z'.m}{5}$	$\frac{Z'.m}{10}$

b - Roue :

$D_p = Z_1.m$ = diamètre primitif,

$p = m.\pi$ = pas (sur le cercle primitif),

$e = m.\frac{\pi}{2}$ = épaisseur des dents (sur le cercle primitif),

$a = m.\frac{\pi}{2} = e$ = hauteur des pieds de dents,

$D_f = m(Z - 3,14$ = diamètre à fond de dents,

D_t = diamètre extérieur théorique.

Le rayon de courbure étant différent en chaque point, est donné par le profil théorique.

c - Pignon.

$D_p = Z'.m$ = diamètre primitif,

$p = m.\pi$ = pas (sur le cercle primitif),

profil théorique pour la courbure des ailes,

$e' = 1,05.m$ = épaisseur des ailes,

$2h$ = double saillie théorique,

$2h' = 2k.h$ = double saillie pratique,

$(Z'.m + 2kh) = D_t$ = diamètre de tête,

$0,45.m$ = sûreté radiale.

4-6 - Définition de l'engrenage "Epicycloïdal elliptique".

Pour cet engrenage, l'odontoïde est formée seulement d'une épicycloïde elliptique engendrée par une ellipse qui roule sans glisser sur un cercle de base,on définit alors un "angle de pression fictif". L'ellipse génératrice est la même pour la roue et le pignon en prise, ce qui permet de faire engrèner plusieurs pignons de nombres de dents différents avec une même roue (roues d'assortiment).

4-61 - Détermination du profil.

Soient figure (V-7), (c) le cercle primitif de la roue, (c') le cercle primitif du pignon, (B) le cercle de base de la roue, (B') le cercle de base du pignon, (E) l'ellipse génératrice. On désignera par a et b les demi-axes de l'ellipse (E), α_f l'angle de pression fictif, R_b le rayon de (B), r_b le rayon de (B'), R le rayon de (c), r le rayon de (c'), AA' le lieu des points de contact.

Quand (E) roule sans glisser sur (B),le point P lié à (E) détermine le profil des dents de la roue.

Quand (E) roule sans glisser sur (B') le point P' lié à (E) détermine le profil des dents du pignon.

4-62 - Caractéristiques dimensionnelles.

a - Ellipse génératrice :

Excentricité : $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0,908,$

Demi grand axe : a = 2,758.m,

Demi petit axe : b = 1,138.m (m = module)

b - Roue :

$D_p = Z.m$ = diamètre primitif

$D_b = D_p - 2\lambda b$ = diamètre du cercle de base.

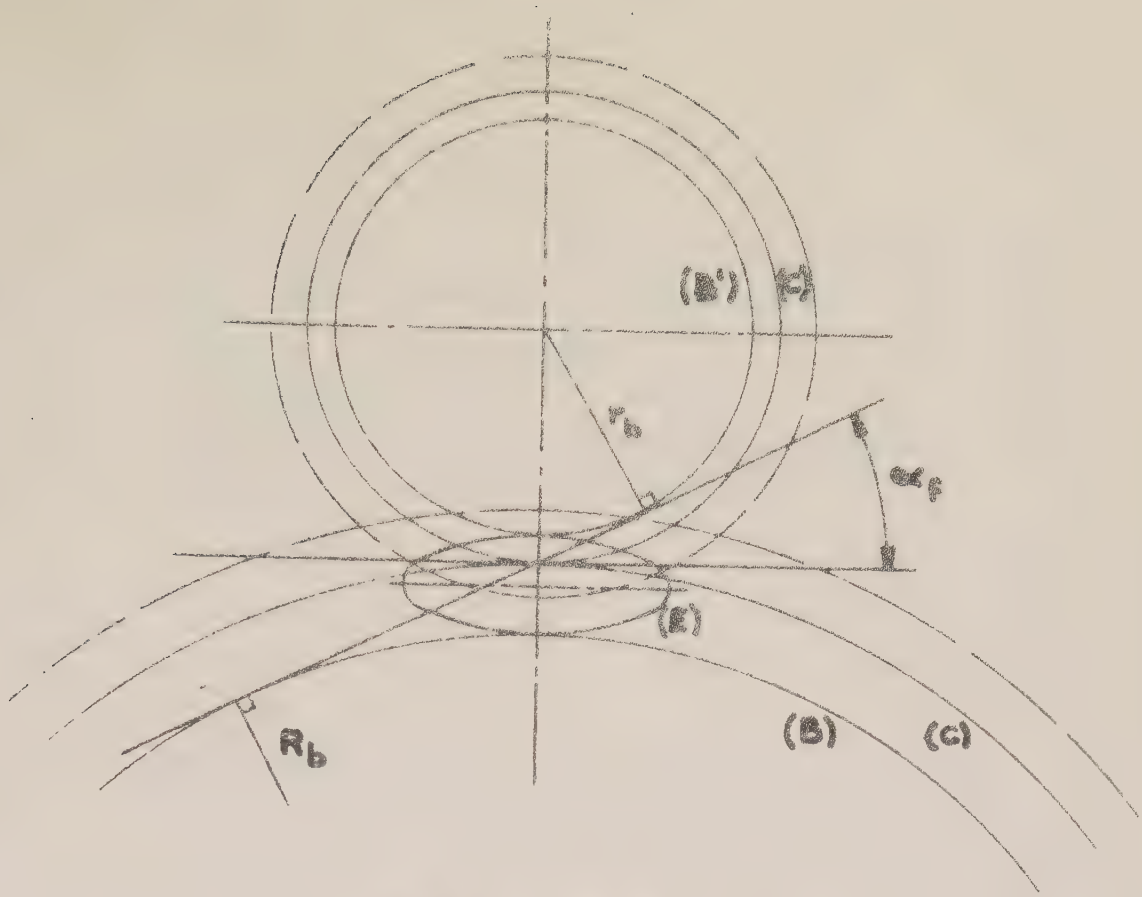


Figure IX-7

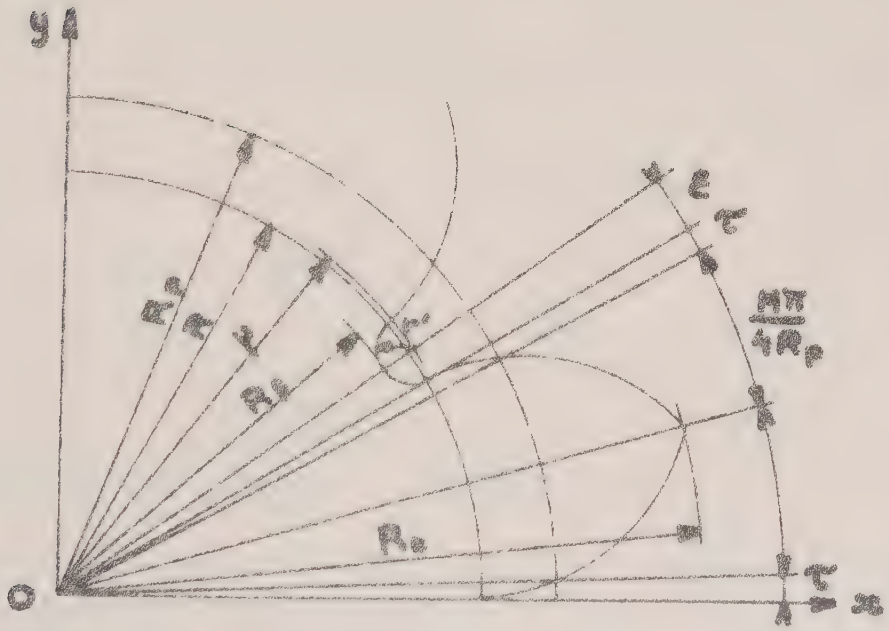


Figure IX-8

$\lambda = 1,115$ = départ de l'ellipse,

$D_b = Z.m - 2,537.m = (Z - 2,537).m$

pas (sur le cercle primitif) $p = m.\pi$,

épaisseur des dents $e = m.\frac{\pi}{2}$,

profil théorique pour la courbure des dents,

Diamètre extérieur théorique D_t.

c - Pignon.

Nombre de dents Z'

Module m

Départ d'ellipse λ'

Diamètre primitif $D_p = Z'.m$,

Diamètre du cercle de base $D_b = D_p - 2\lambda' . b$

Pas (sur le cercle primitif) $p = m.\pi$,

épaisseur des dents (sur le cercle primitif) $e' = m.\frac{\pi}{3}$ si $Z' < 10$

$e' = 2m\frac{\pi}{5}$ si $Z' \geqslant 10$

Profil théorique pour la courbure des dents.

Diamètre de tête théorique.

4-63 - Détermination de λ' et de l'angle de pression fictif α_f :

L'angle α_f est défini figure (IV-7) $\cos \alpha_f = \frac{R_b + r_b}{R + r}$

soit $\cos \alpha_f = 1 - \frac{2,276}{Z + Z'} (\lambda + \lambda')$

si n est le rapport de l'engrenage ($n = \frac{Z}{Z'}$), on a :

$$\lambda' = \frac{1 - \cos \alpha_f}{2,276} - (n + 1) Z' - \lambda \qquad \text{(IV-7)}$$

Suivant les cas, on s'impose λ' ou α_f.

Exemple.

Engrenage multiplicateur $Z = 70$, $Z' = 7$, $m = 0,09$ mm, $n = 10$, $\lambda = 1,115$.

si $\alpha_f = 18°$ $\lambda' = 0,0214\ (n + 1)\ Z' - 1,115$

soit $\lambda' = \frac{1 - \cos 18°}{2,276} \times 11 \times 7 - 1,115 = 0,540$

d'où $D_b = 0,63 - 2 \times 0,540\ .\ 1,138\ .\ 0,09 = \underline{0,52\ mm}$

A la fin de ce texte, des tables numériques donnent les valeurs du déport λ' en fonction de n et Z' (n variant de 1 à 10 et Z' variant de 6 à 30) pour des valeurs de α_f allant de 15 à 25 degrés.

4-7 - Excentricité maximum des ellipses génératrices.

A - Cas des engrenages hypoépicycloïdaux elliptiques.

Pour que l'ellipse génératrice puisse rouler sans glisser et sans interférer à l'intérieur du cercle primitif il faut que son rayon de courbure soit toujours inférieur au rayon du cercle primitif. Le rayon de courbure de l'ellipse est :

$$R = \frac{(1 + Y'^2)^{3/2}}{|Y''|}$$

avec $Y^2 = (1 - \frac{X^2}{a^2})b^2$ voir figure (IV-3).

soit $$\boxed{R = \frac{1}{a^4 b}\left[a^2 (a^2 - X^2) + b^2 X^2\right]^{3/2}} \qquad (IV-8)$$

R est maximum quand X = 0, Y = b ; donc son maximum est :

$$\boxed{R_{max.} = \frac{a^2}{b}} \qquad (IV-9)$$

D'où les conditions limites pour la valeur des demi-axes des ellipses génératrices, figure (IV-6) :

$$\boxed{\frac{a^2}{b} \leqslant \frac{Z.m}{2}}$$

Profils hypo-épicycloïdaux elliptiques

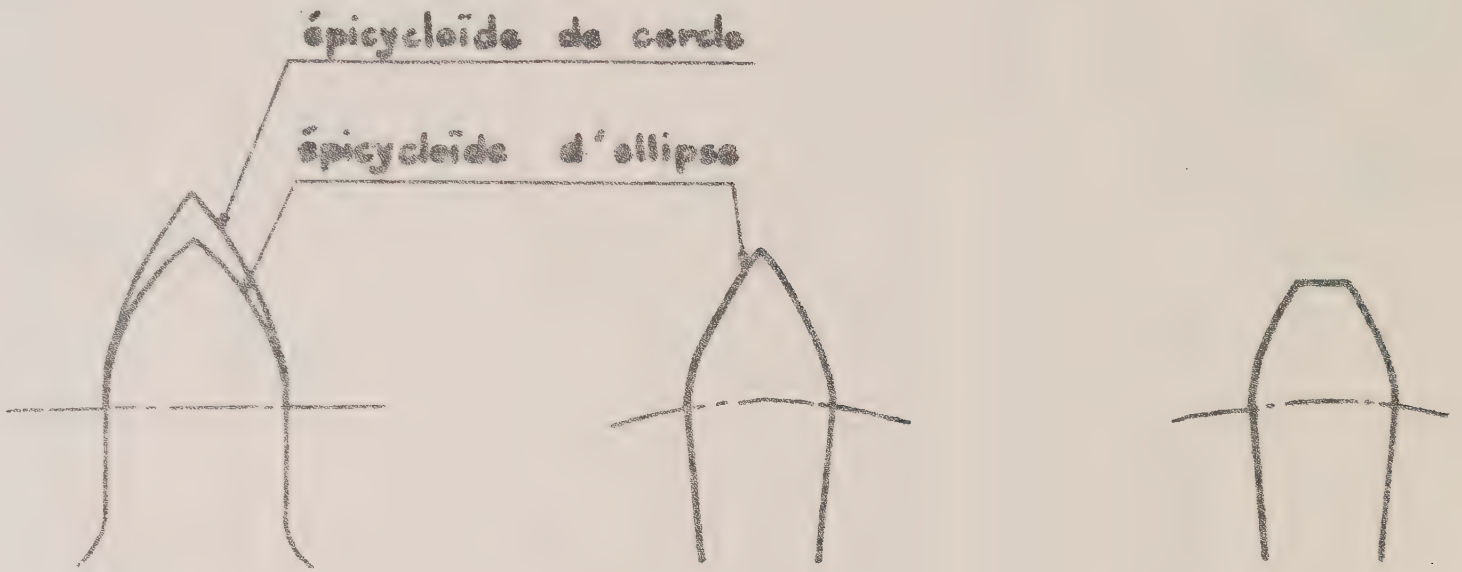


Figure II-9

$$\frac{a'^2}{b'} \leqslant \frac{Z'.m}{2} \qquad \text{(IV-10)}$$

Dans le cas des engrenages définis précédemment, ces conditions sont bien respectées.

B - Pour les engrenages epicycloïdaux elliptiques, ces conditions n'existent pas puisqu'en aucun cas, l'ellipse génératrice roule à l'intérieur du cercle de base.

4-8 - Valeurs théoriques des dimensions des engrenages épicycloïdaux elliptiques.

4-81 - Calcul des rayons de raccordement, figure (IV-8) :

Normalement, les courbes de raccordement de ces engrenages sont des courbes secondaires telles qu'elles sont définies au début de ce chapître, mais pratiquement, puisqu'elles ne sont pas fonctionnelles, on les remplacera par des arcs de cercle, dont le rayon et la position du centre sont définis comme suit :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

x et y étant définis par les équations IV-1.

Soient alors X et Y tels que $r = R_p = \sqrt{X^2 + Y^2}$

d'où $\quad tg\,\tau = \frac{Y}{X} \quad$ et $\quad \tau = \text{arc tg}\,\frac{Y}{X}$

$$\varepsilon = \frac{M\pi}{4R_p} - \tau = \frac{\pi}{2Z} - \tau$$

d'autre part $tg\,\varepsilon = \frac{r'}{R}$, le rayon du cercle de raccordement vaut donc :

$$r' = R.tg\left(\frac{\pi}{2Z} - \tau\right) \qquad \text{IV-11}$$

Le centre de ce cercle se trouve sur un autre cercle centré en O

dont le rayon μ est égal :

$$\mu = \frac{R}{\cos\left(\frac{\pi}{2Z} - \tau\right)} \qquad \text{IV-12}$$

4-82 - Calcul du diamètre à fond de denture (D_f) :

Soit $R_f = \frac{f}{2}$, ou

$$R_f = \mu - r' = R\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2Z} - \tau\right)} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2Z} - \tau\right)\right]$$

soit

$$R_f = R \cdot \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2Z} - \tau\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2Z} - \tau\right)} \qquad \text{IV-13}$$

4-83 - Calcul du diamètre extérieur :

Soient X' et Y' tels que $r = R_t = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$, le diamètre de tête de l'engrenage est donné par :

$$\begin{cases} D_t = 2\sqrt{X'^2 + Y'^2} \\ \frac{Y'}{X'} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2Z} + \tau\right) \end{cases} \qquad \text{(IV-14)}$$

4-9 - Résultats expérimentaux.

Comme pour les profils précédents, un couple d'engrenages multiplicateurs avec des profils hypo-épicycloïdaux elliptiques a été réalisé. Soient une roue de 70 dents et un pignon de 7 ailes au module 18 mm et conformes aux caractéristiques dimensionnelles données au paragraphe 452.

Les mesures étant effectuées toujours dans les mêmes conditions, il est possible d'établir la comparaison avec les autres profils. Les variations de couple enregistrées pour différentes valeurs de l'entraxe ont les valeurs schématisées par la courbe 1

de la figure (IV-11). L'avantage d'un tel profil apparaît immédiatement. En effet, contrairement aux autres, pour lesquels il existe un minimum de variations pour une seule valeur de l'entraxe, il y a ici une plage relativement grande où les variations de couple sont sensiblement les mêmes et minimales. Il suffit de superposer à cette courbe celle obtenue avec le meilleur profil NHS pour avoir une idée plus précise de la différence, et voir que les tolérances sur l'entraxe peuvent facilement être augmentées sans diminuer la qualité de la transmission.

-=-=-=-=-=-=-

ΔP'/P'
(1) profil hypo-épicycloïdal elliptique Z = 70 Z' = 7
(2) profil épicycloïdal elliptique Z = 64 Z' = 12
(3) profil NHS - pignon C Z = 70 Z' = 7
X₀ = entraxe théorique
(1)
(2)
(3)
(X₀ - 0,1m)
X₀
(X₀ + 0,1m)
entraxe

Figure IX-11

CONCLUSION.

Dans cette étude, nous avons considéré l'engrenage de micromécanique comme un organe qui transmet seulement de l'énergie. Nous ne nous sommes pas préoccupés de la transmission du mouvement, car en horlogerie, il importe surtout d'avoir un bon rendement et une force d'entretien constante.

D'autre part, nous avons essayé de faire apparaître les qualités et les défauts des engrenages de micromécanique à partir des engrenages définis par les normes NHS. Le fait de prendre ces normes comme référence ne signifie pas qu'elles aient au départ une situation privilégiée. Nous avons seulement cherché à traiter le problème dans sa généralité.

L'étude des différents phénomènes qui accompagnent le fonctionnement de l'engrenage conduit à un compromis très connu : L'amélioration de la transmission ne s'obtient qu'au prix d'une fabrication très soignée. Malheureusement, même avec beaucoup d'efforts, nous ne pouvons pas atteindre la précision souhaitée. Nous avons donc cherché une solution pour ce compromis et c'est ainsi que nous avons été amenés à étudier les profils elliptiques.

En laboratoire, ces profils nous ont donné satisfaction, et ils semblent posséder les qualités nécessaires à de tels engrenages. En effet, nous avons des profils conjugués répondant à une théorie rigoureuse. L'entraxe influe peu sur la transmission du couple, et surtout la forme des dentsn'entraîne pas des diamètres de roue excessifs. Pour les profils épicycloïdaux elliptiques, l'avantage essentiel est de donner un diamètre de noyau très grand au pignon et une largeur de dent maximale au pied. Par conséquent, les

risques de déformation sont très réduits.

Maintenant, il serait intéressant de connaître le comportement de ces engrenages dans des mécanismes réels, mais pour celà, nous devrons attendre les résultats des essais actuellement en cours. Ceci peut faire apparaître ce travail comme incomplet, mais nous sommes déjà en droit d'espérer une amélioration notable.

Vu le nombre d'études déjà effectuées sur les engrenages et d'après la connaissance que nous avons de ceux-ci,il semblerait préférable pour l'avenir, de porter nos efforts sur des études tendant à améliorer la précision en fabrication,plutôt que sur des études visant à obtenir des profils peu sensibles aux défauts.

-=-=-=-=-=-=-=-

ANNEXE

TABLES PERMETTANT DE DETERMINER LA VALEUR DU DEPORT DE LA DENTURE DES PIGNONS "EPICYCLOIDAUX ELLIPTIQUES" ETUDIES AU CHAPITRE IV.

La valeur λ' du déport donnée par la formule (IV-7) du paragraphe 463 permet de déterminer le diamètre du cercle de base du pignon.

Ces tables donnent les valeurs de λ' pour des pignons de 6 à 30 dents et des rapports de multiplication allant de 1 à 10, l'angle de pression fictif variant de 15° à 25°. Les calculs ont été effectués par la CAB 500 donc leur précision est supérieure à celle couramment nécessaire en fabrication.

-=-=-=-=-=-=-

$\varphi_f = 15°$

z_1 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6										
7										0,037
8									0,082	0,202
9								0,097	0,232	0,367
10							0,082	0,232	0,382	0,531
11						0,037	0,202	0,367	0,531	0,696
12						0,142	0,322	0,501	0,681	0,861
13					0,052	0,247	0,441	0,636	0,831	1,025
14					0,142	0,352	0,561	0,771	0,980	1,190
15				0,007	0,232	0,456	0,681	0,906	1,130	1,355
16				0,082	0,322	0,561	0,801	1,040	1,280	1,519
17				0,157	0,412	0,666	0,921	1,175	1,430	1,684
18				0,232	0,501	0,771	1,040	1,310	1,579	1,849
19			0,022	0,307	0,591	0,876	1,160	1,445	1,729	2,013
20			0,082	0,382	0,681	0,980	1,280	1,579	1,879	2,178
21			0,142	0,456	0,771	1,085	1,400	1,714	2,028	2,343
22			0,202	0,531	0,861	1,190	1,519	1,849	2,178	2,508
23			0,262	0,606	0,951	1,295	1,639	1,984	2,328	2,672
24			0,322	0,681	1,040	1,400	1,759	2,118	2,478	2,837
25		0,007	0,382	0,756	1,130	1,504	1,879	2,253	2,627	3,002
26		0,052	0,441	0,831	1,220	1,609	1,998	2,388	2,777	3,166
27		0,097	0,501	0,906	1,310	1,714	2,118	2,522	2,927	3,331
28		0,142	0,561	0,980	1,400	1,819	2,238	2,651	3,076	3,496
29		0,187	0,621	1,055	1,489	1,924	2,358	2,792	3,226	3,660
30		0,232	0,681	1,130	1,579	2,028	2,478	2,927	3,376	3,825

$\varphi_f = 16°$

n / l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6										0,008
7									0,076	0,195
8								0,110	0,246	0,382
9							0,110	0,263	0,416	0,570
10						0,076	0,246	0,416	0,587	0,757
11					0,008	0,195	0,382	0,570	0,757	0,944
12					0,110	0,314	0,518	0,723	0,927	1,131
13					0,212	0,453	0,655	0,876	1,097	1,318
14				0,076	0,314	0,552	0,791	1,029	1,267	1,506
15				0,161	0,416	0,672	0,927	1,182	1,438	1,693
16				0,246	0,518	0,791	1,063	1,335	1,608	1,880
17			0,042	0,331	0,621	0,910	1,199	1,489	1,778	2,067
18			0,110	0,416	0,723	1,029	1,335	1,642	1,948	2,255
19			0,178	0,501	0,825	1,148	1,472	1,795	2,118	2,442
20			0,246	0,587	0,927	1,267	1,608	1,948	2,289	2,629
21			0,314	0,672	1,029	1,386	1,744	2,101	2,459	2,816
22		0,008	0,382	0,757	1,131	1,506	1,880	2,255	2,629	3,003
23		0,059	0,450	0,842	1,233	1,625	2,016	2,408	2,799	3,191
24		0,110	0,518	0,927	1,335	1,744	2,152	2,561	2,963	3,378
25		0,161	0,587	1,012	1,438	1,863	2,289	2,714	3,140	3,565
26		0,212	0,655	1,097	1,540	1,982	2,425	2,867	3,310	3,752
27		0,263	0,723	1,182	1,642	2,101	2,561	3,020	3,480	3,940
28		0,314	0,791	1,267	1,744	2,220	2,697	3,174	3,650	4,127
29		0,365	0,859	1,352	1,846	2,340	2,833	3,327	3,820	4,314
30		0,416	0,927	1,438	1,948	2,459	2,969	3,480	3,991	4,501

$\varphi_f = 17°$

n / Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6									0,036	0,152
7								0,094	0,228	0,363
8							0,113	0,267	0,420	0,574
9						0,094	0,267	0,440	0,612	0,785
10					0,036	0,228	0,420	0,612	0,804	0,996
11					0,152	0,363	0,574	0,785	0,996	1,207
12				0,036	0,267	0,497	0,728	0,958	1,188	1,419
13				0,132	0,382	0,632	0,881	1,131	1,380	1,630
14				0,228	0,497	0,766	1,035	1,303	1,572	1,841
15			0,036	0,324	0,612	0,900	1,188	1,476	1,764	2,052
16			0,113	0,420	0,728	1,035	1,342	1,649	1,956	2,263
17			0,190	0,516	0,843	1,169	1,495	1,822	2,148	2,475
18			0,267	0,612	0,958	1,303	1,649	1,995	2,340	2,686
19			0,344	0,708	1,073	1,438	1,803	2,167	2,532	2,897
20		0,036	0,420	0,804	1,188	1,572	1,956	2,340	2,724	3,108
21		0,094	0,497	0,900	1,303	1,707	2,110	2,513	2,916	3,319
22		0,152	0,574	0,996	1,419	1,841	2,263	2,686	3,108	3,530
23		0,209	0,651	1,092	1,534	1,975	2,417	2,859	3,300	3,742
24		0,267	0,728	1,188	1,649	2,110	2,571	3,031	3,492	3,953
25		0,324	0,804	1,284	1,764	2,244	2,724	3,204	3,684	4,161
26		0,382	0,881	1,380	1,879	2,379	2,878	3,377	3,876	4,375
27		0,440	0,958	1,476	1,995	2,513	3,031	3,550	4,068	4,586
28		0,497	1,035	1,572	2,110	2,647	3,185	3,722	4,260	4,798
29		0,555	1,111	1,668	2,225	2,782	3,338	3,895	4,452	5,009
30	0,036	0,612	1,188	1,764	2,340	2,916	3,492	4,068	4,644	5,220

$f = 18°$

n / z_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6								0,046	0,175	0,304
7							0,089	0,239	0,390	0,540
8						0,089	0,261	0,433	0,605	0,777
9					0,046	0,239	0,433	0,626	0,820	1,013
10					0,175	0,390	0,605	0,820	1,035	1,250
11				0,067	0,304	0,540	0,777	1,013	1,250	1,487
12				0,175	0,433	0,691	0,949	1,207	1,465	1,723
13			0,003	0,282	0,562	0,841	1,121	1,400	1,680	1,960
14			0,089	0,390	0,691	0,992	1,293	1,594	1,895	2,196
15			0,175	0,497	0,820	1,142	1,465	1,788	2,110	2,433
16			0,261	0,605	0,949	1,293	1,637	1,981	2,325	2,669
17			0,347	0,712	1,078	1,443	1,809	2,175	2,540	2,906
18		0,046	0,433	0,820	1,207	1,594	1,981	2,368	2,755	3,142
19		0,110	0,519	0,927	1,336	1,745	2,153	2,562	2,970	3,379
20		0,175	0,605	1,035	1,465	1,895	2,325	2,755	3,185	3,615
21		0,239	0,691	1,142	1,594	2,046	2,497	2,949	3,400	3,852
22		0,304	0,777	1,250	1,723	2,196	2,669	3,142	3,615	4,089
23		0,368	0,863	1,357	1,852	2,347	2,841	3,336	3,830	4,325
24		0,433	0,949	1,465	1,981	2,497	3,013	3,529	4,045	4,562
25		0,497	1,035	1,573	2,110	2,648	3,185	3,723	4,261	4,798
26	0,003	0,562	1,121	1,680	2,239	2,798	3,357	3,916	4,476	5,035
27	0,046	0,626	1,207	1,788	2,368	2,949	3,529	4,110	4,691	5,271
28	0,089	0,691	1,293	1,895	2,497	3,099	3,701	4,304	4,906	5,508
29	0,132	0,755	1,379	2,003	2,626	3,250	3,873	4,497	5,121	5,744
30	0,175	0,820	1,465	2,110	2,755	3,400	4,045	4,691	5,336	5,981

$\varphi_1 = 19°$

n / l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6							0,035	0,177	0,321	0,464
7						0,057	0,225	0,393	0,560	0,728
8					0,033	0,225	0,416	0,608	0,799	0,991
9					0,177	0,393	0,608	0,823	1,039	1,254
10				0,081	0,321	0,560	0,799	1,039	1,278	1,518
11				0,201	0,464	0,728	0,991	1,254	1,518	1,781
12			0,033	0,321	0,608	0,895	1,182	1,470	1,757	2,044
13			0,129	0,440	0,752	1,063	1,374	1,685	1,996	2,308
14			0,225	0,560	0,895	1,230	1,565	1,901	2,236	2,571
15			0,321	0,680	1,039	1,398	1,757	2,116	2,475	2,834
16		0,033	0,416	0,799	1,182	1,565	1,948	2,331	2,714	3,097
17		0,105	0,512	0,919	1,326	1,733	2,140	2,547	2,954	3,361
18		0,177	0,608	1,039	1,470	1,901	2,331	2,762	3,193	3,624
19		0,249	0,704	1,159	1,613	2,068	2,523	2,978	3,433	3,887
20		0,321	0,799	1,278	1,757	2,236	2,714	3,193	3,672	4,151
21		0,393	0,895	1,398	1,901	2,403	2,906	3,409	3,911	4,414
22		0,464	0,991	1,518	2,044	2,571	3,097	3,624	4,151	4,677
23		0,536	1,087	1,637	2,188	2,738	3,289	3,840	4,390	4,941
24	0,033	0,608	1,182	1,757	2,331	2,906	3,480	4,055	4,629	5,204
25	0,081	0,680	1,278	1,877	2,475	3,074	3,672	4,270	4,869	5,467
26	0,129	0,752	1,374	1,996	2,619	3,241	3,863	4,486	5,108	5,731
27	0,177	0,823	1,470	2,116	2,762	3,409	4,055	4,701	5,348	5,994
28	0,225	0,895	1,565	2,236	2,906	3,576	4,246	4,917	5,587	6,257
29	0,273	0,967	1,661	2,355	3,050	3,744	4,438	5,132	5,826	6,521
30	0,321	1,039	1,757	2,475	3,193	3,911	4,629	5,348	6,066	6,784

$\alpha_t = 20°$

z_1 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6							0,156	0,315	0,474	0,633
7						0,183	0,368	0,551	0,739	0,925
8					0,156	0,368	0,580	0,792	1,004	1,216
9				0,077	0,315	0,554	0,792	1,031	1,269	1,508
10				0,209	0,474	0,739	1,004	1,269	1,534	1,799
11			0,050	0,342	0,633	0,925	1,216	1,508	1,799	2,091
12			0,156	0,474	0,792	1,110	1,428	1,746	2,064	2,382
13			0,262	0,607	0,951	1,296	1,640	1,985	2,329	2,674
14			0,368	0,739	1,110	1,481	1,852	2,223	2,594	2,965
15		0,077	0,474	0,872	1,269	1,667	2,064	2,462	2,859	3,257
16		0,156	0,580	1,004	1,428	1,852	2,276	2,700	3,124	3,548
17		0,236	0,686	1,137	1,587	2,038	2,488	2,939	3,389	3,839
18		0,315	0,792	1,269	1,746	2,223	2,700	3,177	3,654	4,131
19		0,395	0,898	1,402	1,905	2,409	2,912	3,416	3,919	4,422
20		0,474	1,004	1,534	2,064	2,594	3,124	3,654	4,184	4,714
21		0,554	1,110	1,667	2,223	2,780	3,336	3,892	4,449	5,005
22	0,050	0,633	1,216	1,799	2,382	2,965	3,548	4,131	4,714	5,297
23	0,103	0,713	1,322	1,932	2,541	3,151	3,760	4,369	4,979	5,588
24	0,156	0,792	1,428	2,064	2,700	3,336	3,972	4,608	5,244	5,880
25	0,209	0,872	1,534	2,197	2,859	3,521	4,184	4,846	5,509	6,171
26	0,262	0,951	1,640	2,329	3,018	3,707	4,396	5,085	5,774	6,463
27	0,315	1,031	1,746	2,462	3,177	3,892	4,608	5,323	6,039	6,754
28	0,368	1,110	1,852	2,594	3,336	4,078	4,820	5,562	6,304	7,046
29	0,421	1,190	1,958	2,727	3,495	4,263	5,032	5,800	6,569	7,337
30	0,474	1,269	2,064	2,859	3,654	4,449	5,244	6,039	6,834	7,629

$\alpha_T = 21°$

Z \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6						0,110	0,285	0,460	0,635	0,811
7					0,110	0,314	0,519	0,723	0,927	1,132
8				0,052	0,285	0,519	0,752	0,986	1,219	1,453
9				0,198	0,460	0,723	0,986	1,248	1,511	1,774
10			0,052	0,344	0,635	0,927	1,219	1,511	1,803	2,095
11			0,169	0,490	0,811	1,132	1,453	1,774	2,095	2,416
12			0,285	0,635	0,986	1,336	1,686	2,036	2,386	2,737
13		0,023	0,402	0,781	1,161	1,540	1,919	2,299	2,678	3,058
14		0,110	0,519	0,927	1,336	1,744	2,153	2,562	2,970	3,379
15		0,198	0,635	1,073	1,511	1,949	2,386	2,824	3,262	3,700
16		0,285	0,752	1,219	1,686	2,153	2,620	3,087	3,554	4,021
17		0,373	0,869	1,365	1,861	2,357	2,853	3,349	3,846	4,342
18		0,460	0,986	1,511	2,036	2,562	3,087	3,612	4,137	4,663
19		0,548	1,102	1,657	2,211	2,766	3,320	3,875	4,429	4,984
20	0,052	0,635	1,219	1,803	2,386	2,970	3,554	4,137	4,721	5,305
21	0,110	0,723	1,336	1,949	2,562	3,174	3,787	4,400	5,013	5,626
22	0,169	0,811	1,453	2,095	2,737	3,379	4,021	4,663	5,305	5,947
23	0,227	0,898	1,569	2,240	2,912	3,583	4,254	4,925	5,596	6,268
24	0,285	0,986	1,686	2,386	3,087	3,787	4,488	5,188	5,888	6.589
25	0,344	1,073	1,803	2,532	3,262	3,991	4,721	5,451	6,180	6,910
26	0,402	1,161	1,919	2,678	3,437	4,196	4,954	5,713	6,472	7,231
27	0,460	1,248	2,036	2,824	3,612	4,400	5,188	5,976	6,764	7,552
28	0,519	1,336	2,153	2,970	3,787	4,604	5,421	6,239	7,056	7,873
29	0,577	1,423	2,270	3,116	3,962	4,809	5,655	6,501	7,347	8,194
30	0,635	1,511	2,386	3,262	4,137	5,013	5,888	6,764	7,639	8,515

$\alpha_f = 22°$

z_1 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6					0,036	0,228	0,420	0,612	0,804	0,996
7				0,004	0,228	0,452	0,676	0,900	1,124	1,348
8				0,164	0,420	0,676	0,932	1,188	1,444	1,700
9			0,036	0,324	0,612	0,900	1,188	1,476	1,764	2,052
10			0,164	0,484	0,804	1,124	1,444	1,764	2,084	2,404
11			0,292	0,644	0,996	1,348	1,700	2,052	2,404	2,756
12		0,036	0,420	0,804	1,188	1,572	1,956	2,340	2,724	3,108
13		0,132	0,548	0,964	1,380	1,796	2,212	2,628	3,044	3,460
14		0,228	0,676	1,124	1,572	2,020	2,468	2,916	3,364	3,811
15		0,324	0,804	1,284	1,764	2,244	2,724	3,204	3,683	4,163
16		0,420	0,932	1,444	1,956	2,468	2,980	3,491	4,003	4,515
17		0,516	1,060	1,604	2,148	2,692	3,236	3,779	4,323	4,867
18	0,036	0,612	1,188	1,764	2,340	2,916	3,491	4,067	4,643	5,219
19	0,100	0,708	1,316	1,924	2,532	3,140	3,747	4,355	4,963	5,571
20	0,164	0,804	1,444	2,084	2,724	3,364	4,003	4,643	5,283	5,923
21	0,228	0,900	1,572	2,244	2,916	3,587	4,259	4,931	5,603	6,275
22	0,292	0,996	1,700	2,404	3,108	3,811	4,515	5,219	5,923	6,627
23	0,356	1,092	1,828	2,564	3,300	4,035	4,771	5,507	6,243	6,979
24	0,420	1,188	1,956	2,724	3,491	4,259	5,027	5,795	6,563	7,331
25	0,484	1,284	2,084	2,884	3,683	4,483	5,283	6,083	6,883	7,683
26	0,548	1,380	2,212	3,044	3,875	4,707	5,539	6,371	7,203	8,035
27	0,612	1,476	2,340	3,204	4,067	4,931	5,795	6,659	7,523	8,386
28	0,676	1,572	2,468	3,364	4,259	5,155	6,051	6,947	7,843	8,738
29	0,740	1,668	2,596	3,523	4,451	5,379	6,307	7,235	8,162	9,090
30	0,804	1,764	2,724	3,683	4,643	5,603	6,563	7,523	8,482	9,442

$\varphi_f = 23°$

z \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6					0,142	0,351	0,561	0,771	0,886	1,190
7				0,107	0,351	0,596	0,840	1,085	1,329	1,574
8			0,002	0,282	0,561	0,840	1,120	1,399	1,679	1,958
9			0,142	0,456	0,771	1,085	1,399	1,714	2,028	2,342
10			0,282	0,631	0,980	1,329	1,679	2,028	2,377	2,727
11		0,037	0,421	0,806	1,190	1,574	1,958	2,342	2,727	3,111
12		0,142	0,561	0,980	1,398	1,818	2,238	2,657	3,076	3,495
13		0,247	0,701	1,155	1,605	2,063	2,517	2,971	3,425	3,879
14		0,351	0,840	1,329	1,818	2,307	2,796	3,285	3,774	4,263
15		0,456	0,980	1,504	2,028	2,552	3,076	3,600	4,124	4,648
16	0,002	0,561	1,120	1,679	2,238	2,786	3,355	3,914	4,473	5,032
17	0,072	0,666	1,260	1,853	2,447	3,041	3,635	4,228	4,822	5,416
18	0,142	0,771	1,389	2,028	2,657	3,285	3,914	4,543	5,171	5,800
19	0,212	0,875	1,539	2,203	2,866	3,530	4,193	4,857	5,521	6,184
20	0,282	0,980	1,678	2,377	3,076	3,774	4,473	5,171	5,870	6,569
21	0,351	1,085	1,819	2,552	3,285	4,019	4,752	5,486	6,219	6,953
22	0,421	1,190	1,958	2,727	3,495	4,263	5,032	5,800	6,569	7,337
23	0,481	1,295	2,098	2,901	3,705	4,508	5,311	6,115	6,918	7,721
24	0,561	1,399	2,238	3,076	3,914	4,752	5,591	6,429	7,267	8,106
25	0,631	1,504	2,377	3,250	4,124	4,997	5,870	6,743	7,616	8,490
26	0,701	1,605	2,517	3,425	4,333	5,241	6,149	7,058	7,966	8,874
27	0,771	1,714	2,657	3,600	4,543	5,486	6,429	7,372	8,315	9,258
28	0,840	1,818	2,786	3,774	4,752	5,730	6,708	7,686	8,664	9,642
29	0,910	1,923	2,936	3,949	4,962	5,975	6,988	8,001	9,013	10,026
30	0,980	2,028	3,076	4,124	5,171	6,219	7,267	8,315	9,363	10,411

$\alpha_f = 24°$

z \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6				0,024	0,252	0,480	0,708	0,936	1,164	1,392
7				0,214	0,480	0,746	1,012	1,278	1,543	1,809
8			0,100	0,404	0,708	1,012	1,316	1,619	1,923	2,227
9			0,252	0,594	0,936	1,278	1,619	1,961	2,303	2,645
10		0,024	0,404	0,784	1,164	1,543	1,923	2,303	2,683	3,063
11		0,138	0,556	0,974	1,392	1,809	2,227	2,645	3,063	3,481
12		0,252	0,708	1,164	1,619	2,075	2,531	2,987	3,433	3,899
13		0,366	0,860	1,354	1,847	2,341	2,835	3,329	3,823	4,316
14		0,480	1,012	1,543	2,075	2,607	3,139	3,671	4,202	4,734
15	0,024	0,594	1,164	1,733	2,303	2,873	3,443	4,013	4,582	5,152
16	0,100	0,708	1,316	1,923	2,531	3,139	3,747	4,354	4,962	5,570
17	0,176	0,822	1,468	2,113	2,759	3,405	4,051	4,696	5,342	5,988
18	0,252	0,936	1,619	2,303	2,987	3,671	4,354	5,038	5,722	6,406
19	0,328	1,050	1,771	2,493	3,215	3,937	4,658	5,380	6,102	6,823
20	0,404	1,164	1,923	2,683	3,443	4,202	4,962	5,722	6,482	7,241
21	0,480	1,278	2,075	2,873	3,671	4,468	5,266	6,064	6,861	7,659
22	0,556	1,392	2,227	3,063	3,899	4,734	5,570	6,406	7,241	8,077
23	0,632	1,505	2,379	3,253	4,126	5,000	5,874	6,747	7,621	8,495
24	0,708	1,619	2,531	3,443	4,354	5,266	6,178	7,089	8,001	8,913
25	0,784	1,733	2,683	3,633	4,582	5,532	6,482	7,431	8,381	9,330
26	0,860	1,847	2,835	3,823	4,810	5,798	6,785	7,773	8,761	9,748
27	0,936	1,961	2,987	4,013	5,038	6,064	7,089	8,115	9,141	10,166
28	1,012	2,075	3,139	4,202	5,266	6,330	7,393	8,457	9,520	10,584
29	1,088	2,189	3,291	4,392	5,494	6,596	7,697	8,799	9,900	11,002
30	1,164	2,303	3,443	4,582	5,722	6,861	8,001	9,141	10,280	11,420

$\varphi_f = 25°$

n / z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6				0,119	0,366	0,613	0,860	1,107	1,354	1,601
7			0,037	0,325	0,613	0,902	1,190	1,478	1,766	2,054
8			0,202	0,531	0,860	1,190	1,519	1,848	2,178	2,507
9			0,366	0,737	1,107	1,478	1,848	2,219	2,589	2,960
10		0,119	0,531	0,943	1,354	1,766	2,178	2,589	3,001	3,413
11		0,243	0,696	1,149	1,601	2,054	2,507	2,960	3,413	3,865
12		0,366	0,860	1,354	1,848	2,342	2,836	3,330	3,824	4,318
13		0,490	1,025	1,560	2,095	2,631	3,166	3,701	4,236	
14	0,037	0,613	1,190	1,766	2,342	2,919	3,495	4,071	4,648	
15	0,119	0,737	1,354	1,972	2,589	3,207	3,824	4,442	5,059	
16	0,202	0,860	1,519	2,178	2,836	3,495	4,154	4,812	5,471	
17	0,284	0,984	1,684	2,384	3,083	3,783	4,483	5,183	5,883	
18	0,366	1,107	1,848	2,589	3,330	4,071	4,812	5,553	6,294	
19	0,449	1,231	2,013	2,795	3,577	4,359	5,142	5,924	6,706	
20	0,531	1,354	2,178	3,001	3,824	4,648	5,471	6,294	7,118	
21	0,613	1,478	2,342	3,207	4,071	4,936	5,800	6,665	7,529	
22	0,696	1,601	2,507	3,413	4,318	5,224	6,130	7,035	7,941	
23	0,778	1,725	2,672	3,619	4,565	5,512	6,459	7,406	8,353	
24	0,860	1,848	2,836	3,824	4,812	5,800	6,788	7,776	8,764	
25	0,943	1,972	3,001	4,030	5,059	6,088	7,118	8,147	9,176	
26	1,025	2,095	3,166	4,236	5,306	6,377	7,447	8,517	9,587	
27	1,107	2,219	3,330	4,442	5,553	6,665	7,776	8,888	9,999	
28	1,190	2,342	3,495	4,648	5,800	6,953	8,106	9,258	10,411	
29	1,272	2,466	3,660	4,853	6,047	7,241	8,435	9,629	10,822	
30	1,354	2,589	3,824	5,059	6,294	7,529	8,764	9,999	11,234	

DEUXIEME THESE

Proposition donnée par la Faculté :

EXPOSE DES CONNAISSANCES ACTUELLES CONCERNANT LA PHOTOELASTICIMETRIE TRIDIMENSIONNELLE.

N° d'ordre : 24

Jury : MM. MESNAGE : Président
CHALEAT : Rapporteur
VALLEE

Vu et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Besançon.

J. GAY

Vu et approuvé

Le Doyen de la Faculté des Sciences

R. JACQUEMAIN.

Besançon, le avril 1967